TD n°4
Transferts thermiques

Exercice 1 : Association de deux conducteurs

Deux barres de même section S, de conductivité thermiques λ_1 et λ_2 et de longueurs L_1 et L_2 sont mises bout à bout. La surface latérale est parfaitement calorifugée et le contact est parfait entre les deux barres. On se place en régime stationnaire et on suppose que la température ne dépend que de la position x le long de l'axe parallèle aux barres. La position $x = 0$ correspond au contact entre les deux barres. On impose les températures $T(-L_1) = T_1$ et $T(L_2) = T_2$.

1. Déterminer la température $T(x)$ dans les barres. Tracer son évolution.
2. Déterminer le flux thermique traversant chacune des barres. Que remarque-t-on ?
3. En déduire la résistance thermique de l'ensemble des deux barres.
4. Que se passe-t-il si le contact n'est plus parfait ?

Exercice 2 : Gaine isolante

Un tuyau d'eau chaude de température T_e est entouré par une gaine isolante de conductivité thermique λ, de rayon intérieur R_1 (égal au rayon extérieur du tuyau) et de rayon extérieur R_2. La gaine est en contact avec l'air ambiant de température T_0 avec lequel elle a un échange thermique suivant la loi de Newton, avec un coefficient d'échange h. On a $T(R_1) = T_e$ et $T(R_2) = T_2 \neq T_0$.

Données : En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1. Déterminer le profil de température à l'intérieur de la gaine.
2. Pour une longueur l de tuyau, exprimer les résistances thermiques de la gaine et de l'interface gaine/air.
3. Étudier les variations de la résistance thermique équivalente avec R_2. Commentaire ?

Exercice 3 : Chauffage d'une pièce

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20\,°\mathrm{C}$. La résistance thermique des quatre murs et du sol est $R_1 = 10{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $R_2 = 2{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$. La température de l'extérieur est $T_e = 10\,°\mathrm{C}$. On se place en régime stationnaire.

1. Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.
2. On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique R_m de ce matériau afin de réaliser une économie de 50% sur la puissance thermique P.

Exercice 4 : Épaisseur d'un igloo

On considère un igloo de rayon intérieur $R_1 = 1\,\mathrm{m}$ contenant un habitant. La conductivité de la glace est égale à $\lambda = 0{,}05\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ et la température de la surface extérieure de l'igloo est $T_e = -20\,°\mathrm{C}$. On admet que la température intérieure minimale nécessaire à la survie est $T_i = 10\,°\mathrm{C}$. On suppose également que l'habitant dégage une puissance $\mathcal{P} = 50\,\mathrm{W}$ et que les pertes thermiques ne se font que par les murs d'épaisseur e.

1. Utiliser la conservation du flux thermique pour en déduire une équation le liant à la température.
2. Exprimer alors la résistance thermique des murs de l'igloo en fonction des données du problème.
3. Calculer la résistance thermique nécessaire pour le maintient d'une température intérieur $T_i = 10\,°\mathrm{C}$.
4. En déduire l'épaisseur e du mur nécessaire.

Exercice 5 : Hypothermie d'un plongeur

Un plongeur de masse m se trouve dans l'eau équipé de sa combinaison et subit des pertes thermiques au niveau de sa peau et de sa combinaison. On note $T_e = 10\,°\mathrm{C}$ la température uniforme et constante de l'eau et $T_p^0 = 37\,°\mathrm{C}$ la température initiale du plongeur. La température extérieure de la combinaison en néoprène est notée $T_n(t)$ et la température du plongeur est notée $T_p(t)$.

1. Rappeler l'expression de la résistance thermique d'une plaque de section S, d'épaisseur e et de conductivité thermique λ dans le cas d'un modèle unidimensionnel.
2. On modélise les pertes par conducto–convection à l'extérieur de la combinaison par la loi de Newton en introduisant un coefficient de transfert conducto–convectif h. Donner le flux thermique traversant une surface S et en déduire la résistance thermique R_c associée.
3. On modélise les pertes par rayonnement par un flux thermique surfacique $\phi_r = \sigma(T^4 - T_e^4)$ ou σ est appelée la constante de Stefan. On suppose que $|T - T_e| \ll T_e$. Montrer que l'on peut associer une résistance thermique R_r à ces pertes par rayonnement et l'exprimer en fonction de σ, T_e et S la surface d'échange.
4. Faire un schéma du système et le modéliser par un schéma électrique équivalent en indiquant les différentes résistances thermiques. On tiendra compte de la résistance thermique de la peau R_p, de celle la combinaison R_n, de la résistance conducto–convective R_c et de la résistance associée au rayonnement R_r. Quelle est alors la résistance thermique équivalente R_T ? Faire l'application numérique.
5. Que peut-on dire des temps caractéristiques d'évolution du système ? Quelle hypotgèse est-il légitime de faire ici ?
6. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T_p(t)$ sachant que la puissance thermique produite par le métabolisme humain vaut $q = 120\,\mathrm{W}$. On notera $c = 3{,}5\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ sa capacité thermique massique.
7. Au bout de combien de temps le plongeur est-il en hypothermie ?

Pour les applications numériques, on prendra $m = 75\,\mathrm{kg}$, $S = 1{,}3\,\mathrm{m^2}$, $R_p = 3 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$, $\sigma = 5{,}7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$, $h = 10\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$, $e = 3\,\mathrm{mm}$ l'épaisseur de la combinaison, $\lambda = 4{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ sa conductivité thermique et $D \approx 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$ sa diffusivité thermique. Une personne est considérée en hypothermie lorsque sa température descend en dessous de $T_h = 30\,°\mathrm{C}$.

Exercice 6 : Effet de cave

L'atmosphère occupe le demi-espace $x > 0$ et le sous-sol le demi-espace $x < 0$. Le sous-sol est considéré comme homogène, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ. La température au niveau du sol est de la forme :

$$T(0,t) = T_0 + \Theta_0 \cos(\omega t)$$

(variations journalières ou saisonières). Pour simplifier, on utilisera la notation complexe :

$$\underline{T}(0,t) = T_0 + \Theta_0 e^{j\omega t}$$

Données : $\rho = 3{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $c = 515\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ et $\lambda = 1{,}2\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$.

1. Rappeler l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimentionnel sans terme source.
2. On cherche une solution de la forme : $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x)\exp(j\omega t)$. Déterminer $\underline{f}(x)$, en déduire $T(x,t)$.
3. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c \omega}}$. Que représente δ ? Tracer l'évolution de la température dans le sol pour un instant fixé.
4. Calculer l'amplitude de variation de la température à une profondeur de $50\,\mathrm{cm}$ pour une amplitude de variation journalière de la température au sol de $15\,\mathrm{°C}$ autour d'une température moyenne de $3\,\mathrm{°C}$ en hiver.
5. À quelle profondeur les variations annuelles de température dont l'amplitude au sol est de $20\,\mathrm{°C}$ provoquent-elles des variations de température dont l'amplitude est inférieure à $1\,\mathrm{°C}$? Commentaire.