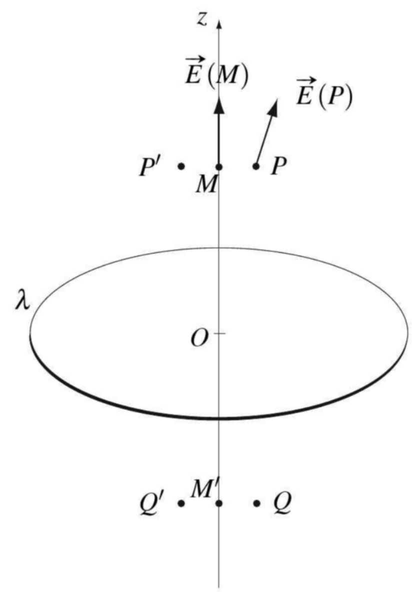
TD n°7
Électrostatique

Dans tout le TD, on prendra $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}10^{-9}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$.

Exercice 1 : Symétries du champ électrostatique

On considère un cerceau d'axe (Oz) chargé uniformément (densité linéique de charges λ). On donne le champ électrique en M sur l'axe et en P.



1. Représenter le champ électrique en :

a) M', symétrique de M par rapport au cerceau

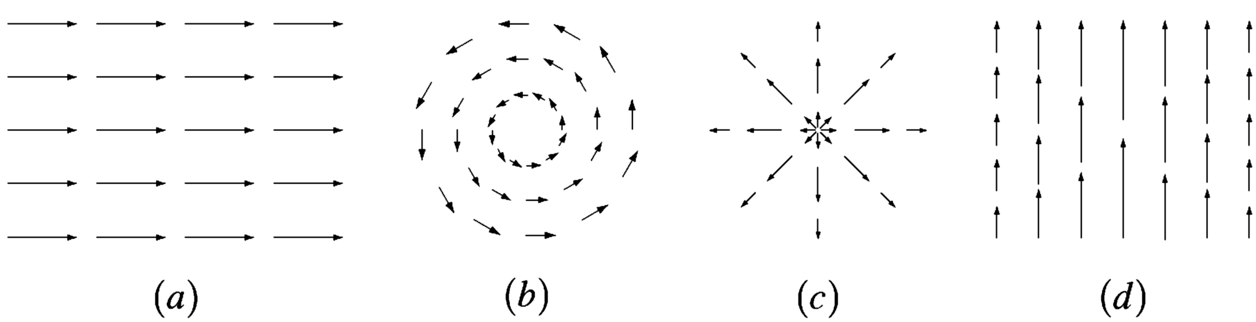
b) P', symétrique de P par rapport à l'axe

c) Q et Q', respectivement symétriques de P et P' par rapport au cerceau

2. Sans calcul, déterminer le champ électrostatique au centre O du cerceau.

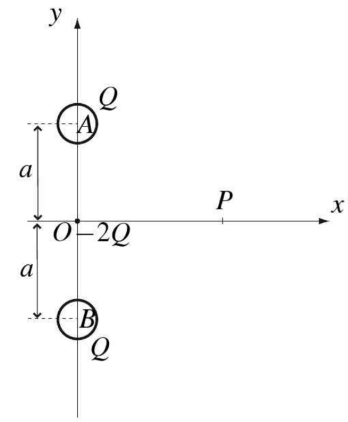
Exercice 2 : Lignes de champ

Les figures ci-dessous représentent, dans un plan $z = cste$, quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme $\vec{a}(x,y) = a_x(x,y)\vec{u_x} + a_y(x,y)\vec{u_y}$.



Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ électrostatique et quand c'est possible, dire si des charges sont présentes dans la région considérée.

Exercice 3 : Charges ponctuelles



Deux sphères portent la charge positive Q uniformément répartie sur leur surface. On admet qu'à l'extérieur, elles créent le même champ électrique qu'une charge ponctuelle Q qui serait située en leur centre. Leurs centres A et B sont distants de $2a$ et situés symétriquement sur l'axe (Oy). Une charge ponctuelle $-2Q$ se trouve au point O.

1. On pose $\vec{E}(P) = E(x)\vec{u}$. Déterminer $\vec{u}$.

2. Étudier la parité de la fonction $E(x)$.

3. Calculer $E(x)$ en fonction de Q, a, ε_0 et x.

Exercice 4 : Champ gravitationnel de la Terre

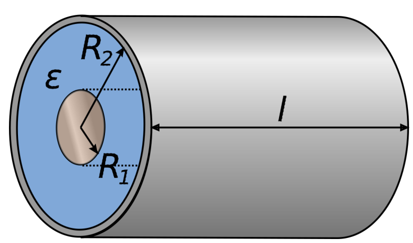
La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R = 6{,}37 \times 10^3$ km et de masse $m = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg répartie uniformément. On donne $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.

1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ gravitationnel à l'extérieur de la Terre.

2. Vérifier que l'on obtient le même résultat en considérant que toute la masse terrestre est concentrée en son centre.

3. Faire l'application numérique pour le champ de gravitation à la surface de la Terre et comparer à l'accélération de la pesanteur.

Exercice 5 : Capacité d'un câble coaxial



On modélise un câble coaxial par deux cylindres conducteurs parfaits infiniment longs, de même axe et de sections circulaires. Le premier, de rayon R_1 est appelé âme et est porté au potentiel $V_1 > 0$. Le second, de rayon $R_2 > R_1$ est appelé gaine et est porté au potentiel $V_2 < V_1$. Ces deux surfaces sont respectivement chargées avec des densités surfaciques de charges notées σ_1 et σ_2. L'espace entre les deux conducteurs est vide de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0$. On néglige les effets de bords ($l \gg R_2$) et on se place en régime statique, ce qui signifie que les charges des deux armatures sont opposées. On note $e = R_2 - R_1$.

1. Déterminer la relation entre σ_1 et σ_2.

2. En raisonnant sur le câble infini, étudier les symétries et invariances. Quelles sont les conséquences pour le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M de l'espace entre les deux armatures ?

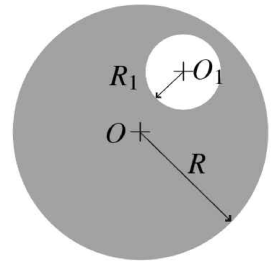
3. En appliquant le théorème de Gauss, exprimer ce champ entre les deux armatures.

4. En déduire la différence de potentiel U entre l'âme et la gaine.

On généralise la définition de la capacité d'un condensateur par analogie avec le condensateur plan, en posant : $C = \dfrac{Q}{U}$, Q étant la charge portée par son armature positive et U la différence de potentiel entre les deux armatures.

5. Déterminer la capacité linéique C_l de ce condensateur cylindrique en fonction de ε_0, R_1 et R_2. Faire l'application numérique pour $R_1 = 1$ mm et $R_2 = 2{,}5$ mm.

Exercice 6 : Grotte sphérique

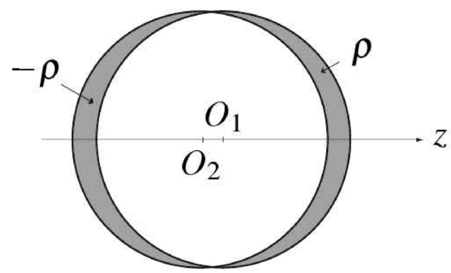


Une cavité sphérique de centre O_1 est creusée à l'intérieur d'un astre sphérique homogène de centre O et de masse volumique ρ.

Déterminer le champ gravitationnel dans la cavité.
Astuce : il y a une astuce !

Exercice 7 : Sphères de charges opposées

Deux sphères, de centres O_1 et O_2, de même rayon R, sont chargées uniformément en volume avec des densités volumiques de charge opposées notées ρ et $-\rho$. Leurs centres sont décalés d'une distance $a \ll R$: $\overrightarrow{O_2O_1} = a\vec{u_z}$.



1. Déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace intérieur et extérieur aux deux sphères (la zone intérieure à l'une et extérieure à l'autre n'est pas intéressante car trop petite).
2. Montrer que l'on peut définir un moment dipolaire $\vec{p}$ pour l'ensemble de ces deux sphères, tel que le champ à l'extérieur soit égal à celui que créerait ce dipôle.

Exercice 8 : Interaction charge-dipôle

On place un dipôle électrosatique rigide $\vec{p}$ en un point M, à proximité d'une charge ponctuelle q située en O. On rappelle qu'un dipôle rigide soumis à un champ électrostatique subit la force $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E})$.

1. Montrer que le dipôle s'oriente radialement par rapport à la charge q.
2. Déterminer l'expression de la force subie par le dipôle, en supposant qu'il s'est préalablement orienté suivant la direction de la question précédente.
3. De même, déterminer l'expression de la force subie par la charge q. Conclusion ?

Exercice 9 : Charges ponctuelles (le retour)

Trois charges électriques égales à Q sont placées au sommet d'un triangle équilatéral dans un plan horizontal. On note (Oz) la verticale passant par le centre O du triangle et d la distance entre chaque charge et le centre.

1. Calculer le champ $\vec{E}_M$ et le potentiel électrique V_M en tout point M de la verticale (Oz), en fonction de l'altitude z du point M.

Au point M, se trouve une petite sphère métallique de rayon r astreinte à se déplacer sans frottements sur l'axe (Oz). Par un mécanisme non étudié ici, la surface de la sphère est en permanence au potentiel V_M de l'endroit où elle se trouve. On supposera que le potentiel est constant à l'échelle de la sphère et que la charge de la sphère est concentrée en M.

2. Déterminer la charge q que porte cette sphère en fonction de sa position z et des constantes.

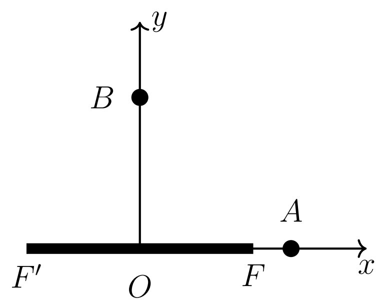
3. Déterminer la force électrique agissant sur la sphère puis la représenter graphiquement en fonction de z.

4. Si la sphère est en plus soumise à son poids, montrer qu'elle ne peut avoir de position d'équilibre que si sa masse m est inférieure à une certaine valeur m_0 que l'on déterminera.

5. Si cette condition est remplie, préciser le nombre de positions d'équilibre possibles et discuter de leur stabilité.

Exercice 10 : Distribution linéique de charges

On considère une distribution linéaire de charges de longueur $F'F = 2\ell$ centrée oen O avec une densité linéique λ constante. On place deux points A et B sur les axes (Ox) et (Oy) respectivement avec $OA = OB = a > \ell$.



1. Par une analyse des symétries, déterminer la forme du champ électrique aux points A et B.

2. Pourquoi le théorème de Gauss n'est-il pas appliquable ici ?

3. Calcul du champ au point A.

a) Déterminer le champ électrique $\mathrm{d}\vec{E}_A$ produit au point A par un petit élément de la distribution de longueur $\mathrm{d}x$.

b) En déduire le champ total $\vec{E}_A$ au point A.

4. De la même manière, calculer le champ $\vec{E}_B$ au point B.