TD n°10
Ondes électromagnétiques dans le vide

Exercice 1 : OPPM électromagnétique ⋆ | ⚓ ♜

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique $\vec{E}(M,t)$ et magnétique $\vec{B}(M,t)$.

On suppose que le champ électrique est de la forme : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$.

2. Déterminer une équation satisfaite par k pour que ce champ soit solution de l'équation donnée en **Q.1**.
3. Quels sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?
4. Quel est son état de polarisation ?
5. Indiquer la relation de structure de ce champ électromagnétique. En déduire le champ $\vec{B}(M,t)$ de cette onde puis le vecteur de Poynting de l'onde.

La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 4\,\mathrm{mm}^2$ orthogonale à sa direction de propagation est $\mathcal{P} = 10\,\mathrm{W}$.

6. Calculer les amplitudes E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique.

Exercice 2 : OPPM électromagnétique de direction quelconque ⋆ | ⚓ ♜

On étudie une onde électromagnétique dans le vide, dont le champ électrique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_x \vec{u}_x + \underline{E}_y \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \underline{E}_x = E_0 \exp\left[i\left(\frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t\right)\right]$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$.

1. Calculer la fréquence de l'onde. Dans quel domaine du spectre se situe cette onde ?
2. Calculer la valeur numérique de k.
3. Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
4. Exprimer $\underline{E}_y$ en fonction de $\underline{E}_x$.
5. Calculer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ de cette onde.
6. Calculer la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
7. Même question pour le vecteur de Poynting. Commentaire ?

Exercice 3 : Onde électromagnétique ⋆⋆ | ♜ 🔧

On donne la représentation complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide, en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\vec{E}} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \\ \underline{\alpha} E_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \end{array} \right.$$

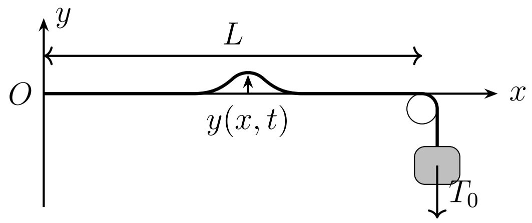
où $\underline{\alpha}$ est complexe et k_0 réel positif.

1. Déterminer $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de E_0, ω, a et c.
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde.
3. Cette onde est-elle plane ? progressive ? harmonique ? transverse ?
4. Calculer le vecteur de Poynting instantanné puis sa moyenne temporelle.

Exercice 4 : Corde vibrante ⋆⋆ |

On considère une corde sans raideur de masse linéique μ uniforme. Cette corde est soumise à une tension T_0 constante. Dans ces conditions, elle coïncide quasiment avec l'axe horiontal (Ox) (la tension est supposée assez importante pour que le poids de la corde soit négligeable).

On se propose de déterminer l'équation de propagation d'une perturbation le long de cette corde. Cette perturbation est caractérisée par la déformation y, fonction de x et de t, comme illustré sur le schéma ci–dessous.



La tension dans la corde est notée $\vec{T} = T_x\vec{e}_x + T_y\vec{e}_y$. On suppose qu'il n'y a pas de mouvement suivant l'axe $\vec{e}_x$ et que le déplacement $y(x,t)$ est un infiniment petit d'ordre un ainsi que l'angle $\alpha = \left|\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|$ que fait la corde au point d'abscisse x avec l'axe Ox.

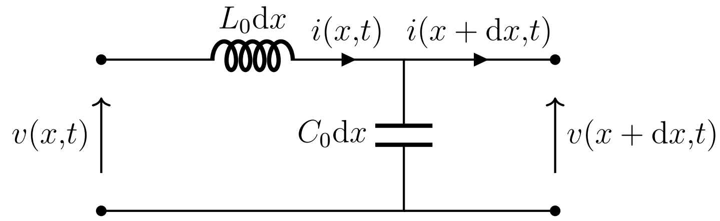
1. Effectuer un bilan des forces sur un petit élément de corde compris entre x et $x + \mathrm{d}x$, les représenter sur un schéma.
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique à ce petit élément de corde. En déduire que la tension de la corde reste constante suivant $\vec{e}_x$, c'est-à-dire $T_x(x) = T_0$.
3. Établir l'équation de propagation sur $y(x,t)$. Quelle forme reconnaît-on ? Identifier la vitesse c de la perturbation.

Un dispositif impose maintenant le mouvement $y(0,t) = b\cos(\omega t)$ avec $b \ll L$. On cherche $y(x,t)$ de la forme $f(x)\cos(\omega t)$. On suppose que $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \neq 0$.

4. Montrer que pour certaines valeurs de ω, il y a résonance et que les pulsations possibles se mettent sous la forme $\omega_n = n\omega_0$ en exprimant ω_0.

Exercice 5 : Câble coaxial sans pertes ★★ |

On modélise un élément mésoscopique de câble coaxial sans pertes :



où L_0, C_0 représentent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble. Dans la section d'abscisse x du câble, le courant vaut $i(x,t)$ et la différence de potentiel $v(x,t)$. Dans la section d'abscisse $x+\mathrm{d}x$ du câble, le courant vaut $i(x+\mathrm{d}x,t)$ et la différence de potentiel $v(x+\mathrm{d}x,t)$. On prendra $L_0 = 0{,}25\,\mu\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et $C_0 = 100\,\mathrm{pF}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. On admet le théorème de Schwarz pour les dérivées partielles : pour une fonction f des variables x et t, $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$.

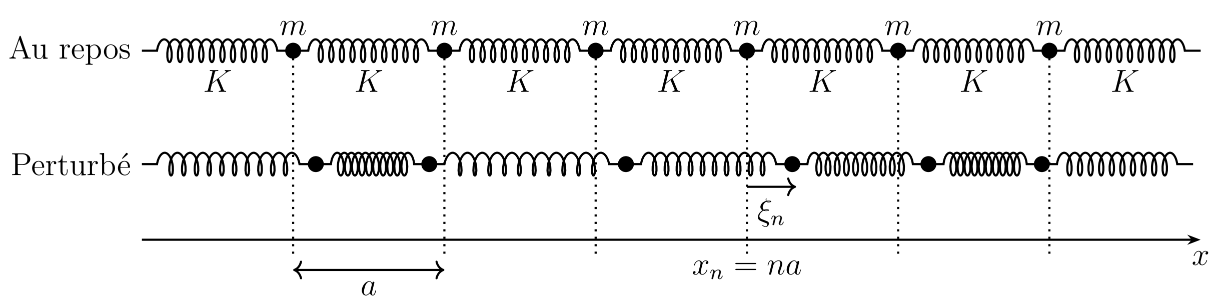
1. Établir le système d'équations reliant les grandeurs $i(x,t)$ et $v(x,t)$. En déduire les équations de propagation vérifiées par les fonctions $i(x,t)$ et $v(x,t)$.
2. Exprimer puis calculer la vitesse c de propagation des ondes dans le câble.

On étudie la propagation d'une onde plane progressive harmonique se propageant vers les x croissants. On pose $\underline{i}(x,t) = \underline{I}_0\exp(j(\omega t - kx))$ et $\underline{v}(x,t) = \underline{V}_0\exp(j(\omega t - kx))$.

3. Déterminer la relation liant v et i pour cette onde.
4. Exprimer l'impédance caractéristique Z_C de la ligne en fonction de L_0 et C_0. Application numérique.

Exercice 6 : Chaîne d'oscillateurs ★★ |

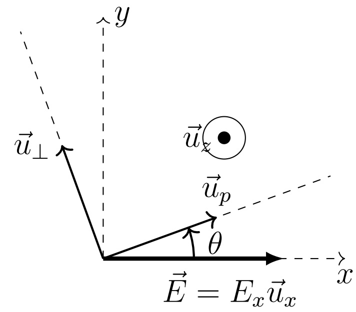
On considère une chaîne infinie d'atomes ponctuels de masse m liés par des ressorts de constante de raideur K. La chaîne est portée par l'axe (Ox). À l'équilibre, les atomes occupent les positions $x_n = na$ avec $n \in \mathbb{Z}$ où a est la longueur à vide des ressorts. On note ξ_n le déplacement de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre. On supposera que le poids des atomes est négligeable devant les forces de rappel élastique.



1. Établir l'équation du mouvement de la particule n.
2. On pose $\underline{\xi}_n = Ae^{i(\omega t - kx_n)}$. Déterminer alors la relation entre ω et k.
3. Montrer que la chaîne se comporte comme un filtre passe-bas dont on calculera la pulsation de coupure ω_c.
4. Que devient la relation de dispersion quand $\omega \ll \omega_c$? Déterminer alors la vitesse c de propagation des ondes dans la chaîne.

Exercice 7 : Rotation d'une polarisation rectiligne ★★ |

On considère une OPPM électromagnétique se propageant dans la direction (Oz) et polarisée rectilignement dans la direction $\vec{u}_x$. On place sur le trajet de cette onde un polariseur orienté pour transmettre une polarisation rectiligne perpendiculaire à (Oz) et faisant un angle θ par rapport au vecteur $\vec{u}_x$.



La direction $\vec{u}_p$ selon laquelle le polariseur transmet une polarisation rectiligne est appelée direction privilégiée. Pour une onde transverse polarisée rectilignement, le polariseur ne transmet que la projection du champ électrique sur la direction privilégiée.

1. Écrire l'expression du champ électrique $\vec{E}$ de cette onde avant la traversée du polariseur (on introduira les notations nécessaires).
2. En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}_1$ de l'onde après la traversée du polariseur (on note φ_0 le déphasage dû à la traversée).

On définit le coefficient de transmission η d'un polariseur comme le rapport de l'éclairement $\mathcal{E}_1$ de l'onde à la sortie par l'éclairement $\mathcal{E}_0$ de l'onde à l'entrée. L'éclairement est donné par la moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting : $\mathcal{E} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$.

3. Calculer η.
   Indication : Utiliser la densité volumique d'énergie électromagnétique (comment se répartissent les contributions magnétiques et électriques ?)

On place maintenant sur le trajet de l'onde une suite de N polariseurs. Le polariseur n est orienté pour transmettre une polarisation rectiligne formant un angle $n\theta$ par rapport à l'axe $\vec{u}_x$.

4. Quel est l'éclairement $\mathcal{E}_N$ de l'onde après la traversée de ces N polariseurs ?
5. Montrer que pour N suffisament grand, le dispositif permet de faire tourner la direction de polarisation rectiligne d'un angle α quelconque avec une perte d'éclairement négligeable.
6. Combien de polariseurs faut-il utiliser pour faire tourner la direction de polarisation d'un angle de 90° avec une perte d'éclairement inférieure à 1% ?