TD n°12
Ondes électromagnétiques dans les conducteurs

Exercice 1 : Paroi d'un four à micro-ondes ⋆ | ⚓

La paroi d'un four à micro-ondes est en aluminium de conductivité $\gamma = 2 \times 10^7\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Quelle doit être l'épaisseur de la paroi pour que l'amplitude d'une onde de fréquence $f = 2{,}5\,\mathrm{GHz}$ soit réduite d'un facteur au moins 10^4 dans la paroi ?

Exercice 2 : Bilan énergétique dans un conducteur ⋆ | ⚓ 🔧

Une onde de basse fréquence se propage dans un conducteur réel de conductivité γ. Le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_x$$

1. En utilisant une équation de Maxwell, trouver l'expression du champ magnétique.
2. Calculer la moyenne temporelle $\langle\vec{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting.
3. Calculer la moyenne temporelle $\langle\mathcal{P}_{v,J}\rangle$ de la puissance volumique dissipée par effet Joule.
4. Vérifier que $\mathrm{div}\langle\vec{\Pi}\rangle + \langle\mathcal{P}_{v,J}\rangle = 0$ et interpréter.

Exercice 3 : Étude d'un guide d'onde ⋆⋆ | ♜ 🔧 ⚠

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique de pulsation ω entre deux plans métalliques $y = 0$ et $y = a$ parfaitement conducteurs. Le milieu entre ces deux plans est le vide. Par hypothèse, le vecteur champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = f(y)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

ou $f(y)$ et k sont respectivement une fonction et un paramètre dont nous allons chercher les expressions. On rappelle que le champ électrique à la surface d'un métal conducteur parfait est orthogonal à la surface de ce métal.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction f.
2. Expliciter tous les types de solution selon le signe de la grandeur $k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}$.
3. Compte tenu des conditions aux limites vérifiées par le champ électrique sur les plans métalliques, montrer que $f(y)$ s'écrit :

$$f(y) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

où E_0 est une constante et $n \in \mathbb{N}^*$.

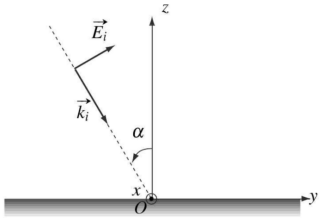
4. Pour n fixé (on parle du mode n), quelle est alors la relation de dispersion ? Quelle est la pulsation minimale ω_m que doit avoir une onde pour se propager entre les deux plans ?
5. Déterminer les vitesses de phase et de groupe pour le mode n en fonction de ω et ω_m.

Exercice 4 : Réflexion d'une OPPM en incidence normale ⋆ | ⚓ ♜

Une OPPM de champ électrique noté $\vec{E}_i(x,t) = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y + 2E_0\cos\left(\omega t - kx + \dfrac{\pi}{4}\right)\vec{u}_z$ se propage dans le vide et rencontre en $x = a$ un plan métallique parfaitement conducteur (le métal occupe le demi-espace $x > a$).
On rappelle qu'à la surface d'un conducteur parfait, le champ électrique doit être orthogonal à la surface.

Trouver le champ électrique de l'onde réflechie.

Exercice 5 : Réflexion en incidence oblique ⋆⋆⋆ | ♜ ⌛ 💣



Une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_i$, se propage dans le vide et arrive sur la surface d'un étal parfaitement conducteur avec un angle d'incidence α comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Le métal occupe le demi-espace $z < 0$ et le vecteur $\vec{k}_i$ est contenu dans le plan (yOz).
Dans un premier temps, on suppose que le champ électrique $\vec{E}_i$ de l'onde incidente de norme E_0 est compris dans le plan d'incidence (yOz). On rappelle que le champ électrique (resp. magnétique) doit être orthogonal (resp. tangent) à la surface d'un métal conducteur parfait.

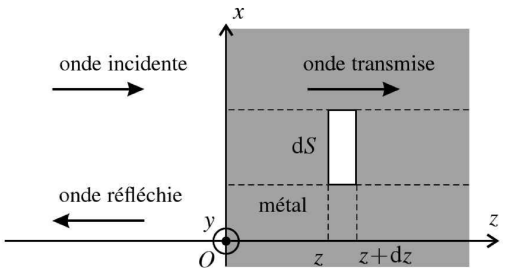
1. Exprimer le champ électrique incident $\vec{E}_i(M,t)$.
2. Montrer qu'il existe une onde réflechie. On admet qu'il s'agit d'une OPPM et que la direction de son vecteur d'onde $\vec{k}_r$ est donné par la loi de Descartes de l'optique géométrique. Représenter $\vec{k}_r$.
3. Montrer que le champ électrique $\vec{E}_r$ est tel que $\|\vec{E}_r(O,t)\| = \|\vec{E}_i(O,t)\|$.
   Astuce : Effectuer un bilan de puissance sur la surface.
4. Représenter $\vec{E}_r$ ainsi que les champs magnétiques $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$ des ondes incidente et réfléchie.
5. Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi $\vec{E}_r(M,t)$.
6. Reprendre l'exercice dans le cas où le champ électrique incident est perpendiculaire au plan d'indidence, c'est-à-dire par exemple $\vec{E}_i(O, t=0) = E_0\vec{u}_x$.
7. Quelles sont les composantes du champ électromagnétique qui subissent un déphasage de π à la réflexion sur le métal parfait ?

Exercice 6 : Pression de radiation ★★★ | 🎳 🔧 💣

Une OPPM de pulsation ω arrive en incidence normale sur la surface (plan $z = 0$) d'un métal de conductivité γ. Cette onde donne naissance à une onde réflechie et à une onde transmise dans le métal, dont le champ magnétique est, dans l'approximation des basses fréquences :

$$\vec{B}_t = B_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_y$$

avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.



1. Déterminer la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le métal en négligeant le courant de déplacement.

On considère que le métal contient des ions de charge $q_i = +e$ fixes et dont le nombre par unité de volume est n_i, ainsi que des électrons de charge $q_e = -e$, tous animés de la même vitesse $\vec{v}_e$ et dont le nombre par unité de volume est n_e.

2. Exprimer la force exercée par le champ électromagnétique $(\vec{E}_t, \vec{B}_t)$ sur un ion puis sur un électron.
3. Pourquoi a-t-on localement $n_e = n_i$?
4. Montrer que la force électromagnétique s'exercant sur un élement de volume du métal est : $\mathrm{d}_v\vec{F} = \vec{f}_v \mathrm{d}\tau$ avec $\vec{f}_v = \vec{j} \wedge \vec{B}_t$ la densité volumique de force électromagnétique.
5. Exprimer la moyenne temporelle $\langle \vec{f}_v \rangle$ en fonction de B_0, γ, δ et z.

On considère, à l'intérieur du métal, un petit parallélépipède de longueur $\mathrm{d}z$ et de base parallèle à l'interface de surface $\mathrm{d}S$.

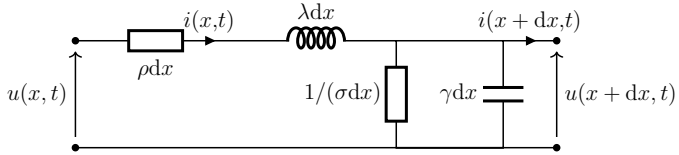
6. Exprimer la force moyenne $\langle \mathrm{d}_v\vec{F} \rangle$ qui s'exerce sur ce parallélépipède et en déduire la force $\mathrm{d}\vec{F}$ qui s'exerce sur toute la colonne de métal de section $\mathrm{d}S$ en fonction de B_0.

Dans la limite $\delta \to \infty$, on peut considérer que cette force s'applique en surface uniquement. On admet que le champ magnétique dans le vide est de la forme : $\vec{B}_{vide}(z,t) = B_0 \cos\left(\dfrac{\omega z}{c}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$.

7. Exprimer alors la pression P_r correspondant à la force $\mathrm{d}\vec{F}$, appelée pression de radiation, en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$ dans le vide au niveau de la surface du métal.

Exercice 7 : Câble coaxial avec pertes ★★★ | 🔧 ⌛ 💣

On étudie un câble coaxial avec pertes dont le schéma équivalent d'un tronçon de longueur $\mathrm{d}x$ est représenté ci–dessous :



où $\rho\mathrm{d}x$, $\gamma\mathrm{d}x$, $\lambda\mathrm{d}x$ représentent respectivement la résistance, la capacité et l'inductance du tronçon et $1/(\sigma\mathrm{d}x)$ est la résistance de fuite du tronçon. La tension entre les conducteurs et l'intensité du courant les parcourant sont notées $u(x,t)$ et $i(x,t)$ à l'abscisse x et l'instant t. La ligne est obtenue par mise en série d'une infinité de tronçons élémentaires de longueur $\mathrm{d}x$ très petite par rapport à la longueur d'onde.

1. Relier, d'une part, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ à i et $\dfrac{\partial i}{\partial t}$ puis d'autre part $\dfrac{\partial i}{\partial x}$ à u et $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.
2. Établir alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $u(x,t)$ puis par $i(x,t)$. Cette équation porte le nom d'*équation des télégraphistes*. On admettra le théorème de Schwarz pour les dérivées partielles : pour une fonction f des variables x et t, $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$.

On pose les grandeurs complexes

$$\underline{u}(x,t) = U_m e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - kx + \varphi_u)} \qquad \text{et} \qquad \underline{i}(x,t) = I_m e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - kx + \varphi_i)}$$

avec α et k deux grandeurs réelles positives, de sorte que $u(x,t) = \Re(\underline{u}(x,t))$ et $i(x,t) = \Re(\underline{i}(x,t))$.

3. Trouver deux relations liant α, k et ω aux caractéristiques ρ, σ, γ et λ du câble.
4. En déduire la relation de dispersion (cela revient à éliminer α des équations précédente pour trouver une équation bicarrée en k).
5. Montrer que le discriminant Δ de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\Delta = (\rho\sigma - \omega^2\lambda\gamma)^2 + \omega^2(\rho\gamma + \lambda\sigma)^2$$

puis expliciter la seule solution k^2 acceptable.

6. On se place dans le cas $\rho \ll \lambda\omega$ et $\sigma \ll \gamma\omega$. Quelle est la condition liant les caractéristiques du câble pour que la relation entre k et ω soit linéaire pour toute valeur de ω ? Cette relation porte le nom de *condition de Heaviside*. Que vaut alors α ? Quel est l'intérêt de cette configuration ?
7. On considère à partir de maintenant que la résistance de fuite est infinie : $\sigma = 0$.
   a) D'après ce qui précède, expliciter dans ces conditions, les expressions de k et α en fonction de ω et des caractéristiques du câble. On fera apparaître à chaque fois le rapport $\rho/(\lambda\omega)$.
   b) Que deviennent ces expressions si $\rho \ll \lambda\omega$? Quel est l'intérêt de ce type de régime ?
   c) Que deviennent ces expressions si $\rho \gg \lambda\omega$? Exprimer alors les vitesses de phase et de groupe puis commenter.