TD n°12

Ondes électromagnétiques dans les conducteurs

Exercice 1 : Paroi d'un four à micro-ondes

* | **&**

La paroi d'un four à micro-ondes est en aluminium de conductivité $\gamma = 2 \times 10^7 \,\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Quelle doit être l'épaisseur de la paroi pour que l'amplitude d'une onde de fréquence $f = 2,5 \,\mathrm{GHz}$ soit réduite d'un facteur au moins 10^4 dans la paroi?

Exercice 2 : Bilan énergétique dans un conducteur



Une onde de basse fréquence se propage dans un conducteur réel de conductivité γ . Le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

- 1. En utilisant une équation de Maxwell, trouver l'expression du champ magnétique.
- 2. Calculer la moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$ du vecteur de Poynting.
- 3. Calculer la moyenne temporelle $\langle \mathcal{P}_{v,J} \rangle$ de la puissance volumique dissipée par effet Joule.
- **4.** Vérifier que div $\langle \vec{\Pi} \rangle + \langle \mathcal{P}_{v,J} \rangle = 0$ et interpréter.

Exercice 3 : Réflexion d'une OPPM en incidence normale * | & incidence normale

Une OPPM de champ électrique noté $\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y + 2E_0 \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_z$ se propage dans le vide et rencontre en x = a un plan métallique parfaitement conducteur (le métal occupe le demi-espace x > a).

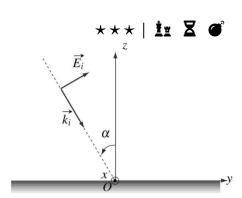
On rappelle qu'à la surface d'un conducteur parfait, le champ électrique doit être orthogonal à la surface.

Trouver le champ électrique de l'onde réflechie.

Exercice 4 : Réflexion en incidence oblique

Une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement, de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k}_i , se propage dans le vide et arrive sur la surface d'un étal parfaitement conducteur avec un angle d'incidence α comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Le métal occupe le demi-espace z < 0 et le vecteur \vec{k}_i est contenu dans le plan (yOz).

Dans un premier temps, on suppose que le champ électrique $\vec{E_i}$ de l'onde incidente de norme E_0 est compris dans le plan d'incidence



(yOz). On rappelle que le champ électrique (resp. magnétique) doit être orthogonal (resp. tangent) à la surface d'un métal conducteur parfait.

- 1. Exprimer le champ électrique incident $\vec{E}_i(M,t)$.
- 2. Montrer qu'il existe une onde réflechie. On admet qu'il s'agit d'une OPPM et que la direction de son vecteur d'onde \vec{k}_r est donné par la loi de Descartes de l'optique géométrique. Représenter \vec{k}_r .
- 3. Montrer que le champ électrique \vec{E}_r est tel que $||\vec{E}_r(O,t)|| = ||\vec{E}_i(O,t)||$. Astuce: Effectuer un bilan de puissance sur la surface.
- 4. Représenter \vec{E}_r ainsi que les champs magnétiques \vec{B}_i et \vec{B}_r des ondes incidente et réfléchie.
- 5. Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi $\vec{E}_r(M,t)$.
- 6. Reprendre l'exercice dans le cas où le champ électrique incident est perpendiculaire au plan d'indidence, c'est-à-dire par exemple $\vec{E}_i(O,t=0) = E_0 \vec{u}_x$.
- 7. Quelles sont les composantes du champ électromagnétique qui subissent un déphasage de π à la réflexion sur le métal parfait ?

Exercice 5 : Étude d'un guide d'onde



On étudie la propagation d'une onde électromagnétique de pulsation ω entre deux plans métalliques y=0 et y=a parfaitement conducteurs. Le milieu entre ces deux plans est le vide. Par hypothèse, le vecteur champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = f(y)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

ou f(y) et k sont respectivement une fonction et un paramètre dont nous allons chercher les expressions. On rappelle que le champ électrique à la surface d'un métal conducteur parfait est orthogonal à la surface de ce métal.

- 1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction f.
- 2. Expliciter tous les types de solution selon le signe de la grandeur $k^2 \frac{\omega^2}{c^2}$.
- 3. Compte tenu des conditions aux limites vérifiées par le champ électrique sur les plans métalliques, montrer que f(y) s'écrit :

$$f(y) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

où E_0 est une constante et $n \in \mathbb{N}^*$.

- 4. Pour n fixé (on parle du mode n), quelle est alors la relation de dispersion? Quelle est la pulsation minimale ω_m que doit avoir une onde pour se propager entre les deux plans?
- 5. Déterminer les vitesses de phase et de groupe pour le mode n en fonction de ω et ω_m .

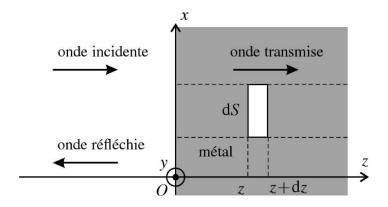
Exercice 6: Pression de radiation

*** | <u>i</u>y / g

Une OPPM de pulsation ω arrive en incidence normale sur la surface (plan z=0) d'un métal de conductivité γ . Cette onde donne naissance à une onde réflechie et à une onde transmise dans le métal, dont le champ magnétique est, dans l'approximation des basses fréquences :

$$\vec{B}_t = B_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_y$$

avec
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$
.



1. Déterminer la densité volumique de courant \vec{j} dans le métal en négligeant le courant de déplacement.

On considère que le métal contient des ions de charge $q_i = +e$ fixes et dont le nombre par unité de volume est n_i , ainsi que des électrons de charge $q_e = -e$, tous animés de la même vitesse \vec{v}_e et dont le nombre par unité de volume est n_e .

- 2. Exprimer la force exercée par le champ électromagnétique (\vec{E}_t, \vec{B}_t) sur un ion puis sur un électron.
- **3.** Pourquoi a-t-on localement $n_e = n_i$?
- 4. Montrer que la force électromagnétique s'exercant sur un élement de volume du métal est : $d_v \vec{F} = \vec{f_v} d\tau$ avec $\vec{f_v} = \vec{j} \wedge \vec{B_t}$ la densité volumique de force électromagnétique.
- **5.** Exprimer la moyenne temporelle $\langle \vec{f_v} \rangle$ en fonction de B_0 , γ , δ et z.

On considère, à l'intérieur du métal, un petit parallélépipède de longueur dz et de base parallèle à l'interface de surface dS.

6. Exprimer la force moyenne $\langle d_v \vec{F} \rangle$ qui s'exerce sur ce parallélépipède et en déduire la force $d\vec{F}$ qui s'exerce sur toute la colonne de métal de section dS en fonction de B_0 .

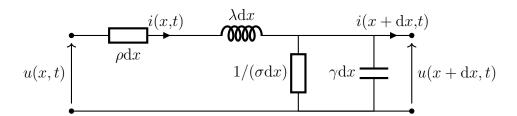
Dans la limite $\delta \to \infty$, on peut considérer que cette force s'applique en surface uniquement. On admet que le champ magnétique dans le vide est de la forme : $\vec{B}_{vide}(z,t) = B_0 \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$.

7. Exprimer alors la pression P_r correspondant à la force $d\vec{F}$, appelée pression de radiation, en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$ dans le vide au niveau de la surface du métal.

Exercice 7 : Câble coaxial avec pertes

***| 🎤 🛭 💣

On étudie un câble coaxial avec pertes dont le schéma équivalent d'un tronçon de longueur dx est représenté ci-dessous :



où ρdx , γdx , λdx représentent respectivement la résistance, la capacité et l'inductance du tronçon et $1/(\sigma dx)$ est la résistance de fuite du tronçon. La tension entre les conducteurs et l'intensité du courant les parcourant sont notées u(x,t) et i(x,t) à l'abscisse x et l'instant t. La ligne est obtenue par mise en série d'une infinité de tronçons élémentaires de longueur dx très petite par rapport à la longueur d'onde.

- **1.** Relier, d'une part, $\frac{\partial u}{\partial x}$ à i et $\frac{\partial i}{\partial t}$ puis d'autre part $\frac{\partial i}{\partial x}$ à u et $\frac{\partial u}{\partial t}$.
- 2. Établir alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u(x,t) puis par i(x,t). Cette équation porte le nom d'équation des télégraphistes. On admettra le théorème de Schwarz pour les dérivées partielles : pour une fonction f des variables x et t, $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)$.

On pose les grandeurs complexes

$$\underline{u}(x,t) = U_m e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - kx + \varphi_u)}$$
 et $\underline{i}(x,t) = I_m e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - kx + \varphi_i)}$

avec α et k deux grandeurs réelles positives, de sorte que $u(x,t)=\Re(\underline{u}(x,t))$ et $i(x,t)=\Re(\underline{i}(x,t))$.

- 3. Trouver deux relations liant α , k et ω aux caractéristiques ρ , σ , γ et λ du câble.
- 4. En déduire la relation de dispersion (cela revient à éliminer α des équations précédente pour trouver une équation bicarrée en k).
- 5. Montrer que le discriminant Δ de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\Delta = (\rho\sigma - \omega^2\lambda\gamma)^2 + \omega^2(\rho\gamma + \lambda\sigma)^2$$

puis expliciter la seule solution k^2 acceptable.

- 6. On se place dans le cas $\rho \ll \lambda \omega$ et $\sigma \ll \gamma \omega$. Quelle est la condition liant les caractéristiques du câble pour que la relation entre k et ω soit linéaire pour toute valeur de ω ? Cette relation porte le nom de *condition de Heaviside*. Que vaut alors α ? Quel est l'intérêt de cette configuration?
- 7. On considère à partir de maintenant que la résistance de fuite est infinie : $\sigma=0$.
 - a) D'après ce qui précède, expliciter dans ces conditions, les expressions de k et α en fonction de ω et des caractéristiques du câble. On fera apparaître à chaque fois le rapport $\rho/(\lambda\omega)$.
 - b) Que deviennent ces expressions si $\rho \ll \lambda \omega$? Quel est l'intérêt de ce type de régime?
 - c) Que deviennent ces expressions si $\rho \gg \lambda \omega$? Exprimer alors les vitesses de phase et de groupe puis commenter.