TD n°13
Rayonnement dipolaire électrique

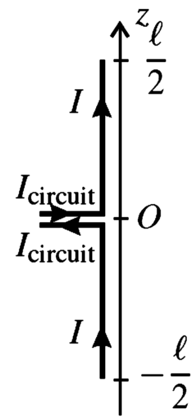
Exercice 1 : Antenne assimilable à un dipôle oscillant

On considère une antenne hertzienne de taille ℓ alimentée en son milieu par un circuit qui délivre l'intensité :

$$I_{circuit}(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

Dans l'antenne, l'intensité I dépend de z et du temps. On suppose qu'elle est nulle aux deux extrémités de côte $z = \pm\dfrac{\ell}{2}$. D'après les hypothèses, le courant dans l'antenne vaut :

$$I(z,t) = I_{circuit}(t)\left(1 - 2\frac{|z|}{\ell}\right)$$



1. Quelle doit être la condition sur ℓ pour que cette antenne puisse-être étudiée dans le cadre des dipôles électrique oscillant ?
2. En utilisant la loi locale de conservation de la charge sous la forme $\dfrac{\partial \lambda}{\partial t} + \dfrac{\partial I}{\partial z} = 0$, déterminer la densité linéique de charge $\lambda(z,t)$ le long du fil en $z > 0$ et en $z < 0$.
3. En déduire que cette antenne est assimilable à un dipôle, dont le moment dipolaire s'écrit

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t + \psi)\vec{u}_z$$

avec p_0 et ψ à exprimer.

Exercice 2 : Champ électromagnétique d'un dipôle électrique oscillant

On donne l'expression du champ électromagnétique en un point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ), créé dans le vide par un dipôle électrique oscillant $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$ placé en O. On se place dans une zone telle que r soit très grand devant la taille caractéristique ℓ du dipôle.

$$\begin{aligned}\vec{E}(M,t) &= \frac{p_0 \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{r^2}\cos(\omega t - kr) - \frac{\omega}{cr}\sin(\omega t - kr)\right)\vec{u}_r \\ &+ \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{r^2}\cos(\omega t - kr) - \frac{\omega}{cr}\sin(\omega t - kr) - \frac{\omega^2}{c^2}\cos(\omega t - kr)\right)\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

et

$$\vec{B}(M,t) = -\frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c r}\left(\frac{\omega}{cr}\sin(\omega t - kr) + \frac{\omega^2}{c^2}\cos(\omega t - kr)\right)\vec{u}_\varphi$$

en notant $k = \dfrac{\omega}{c}$.

1. Vérifier l'homogénéité de ces expressions.
2. Simplifier ces expressions dans le cas où $kr \ll 1$ en ne gardant que le(s) termes(s) de plus forte amplitude pour chacun des champs.

3. Commenter les expressions simplifiées et comparer les ordres de grandeurs des densités volumiques moyennes d'énergie électrique et magnétique.
4. Reprendre les deux questions précédentes pour $kr \gg 1$.

Exercice 3 : Dipôle magnétique oscillant

Une spire circulaire de centre O, de rayon a et d'axe (Oz) est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation ω et dont l'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ est la même en tout point du circuit. Cette spire possède un moment magnétique instantané $\vec{m}(t) = m_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$ avec m_0 une constante. Elle crée dans sa zone de rayonnement un champ électromagnétique ayant dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe (Oz) l'expression :

$$\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r c}\cos(\omega t - kr)\vec{u}_\varphi \quad \text{et} \quad -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r c^2}\cos(\omega t - kr)\vec{u}_\theta$$

1. Exprimer m_0 en fonction de I_0 et a.
2. Identifier dans les deux expressions ci-dessus, celle du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ et celle du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$. Donner le plus possible d'arguments pour justifier votre réponse.
3. Que vaut le rapport $\dfrac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|}$? Décrire la structure du champ électromagnétique rayonné par le dipôle magnétique oscillant, la comparer au champ électromagnétique rayonné par le dipôle électrique oscillant.
4. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ainsi que sa moyenne temporelle.
5. Calculer la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ rayonnée dans tout l'espace. Montrer qu'elle se met sous la forme :
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} R_0 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0^2$$
avec λ la longueur d'onde et R_0 à exprimer en fonction de μ_0 et c uniquement. Faire l'application numérique pour R_0.

Exercice 4 : Antenne demi-onde

Une antenne filiforme, colinéire à (Oz), de longueur $\ell = \dfrac{\lambda}{2}$, centrée à l'origine, est le siège d'un courant sinusoïdal de la forme :

$$\underline{I}(z,t) = I_0 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{i\omega t}$$

avec $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$.

Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'origine O et d'axe (Oz). On se place dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$. On admet que le champ magnétique total rayonné est :

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = \frac{i\mu_0 I_0}{2\pi r \sin\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{u}_\varphi$$

et que localement, ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive de direction de propagation $\vec{u}_r$.

1. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting en M.
2. Dans quelle direction cette antenne rayonne-t-elle le maximum d'énergie ? Représenter l'indicatrice de rayonnement.
3. Calculer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r.
4. En déduire la résistance de rayonnement R de l'antenne, définie par $\mathcal{P} = RI_{eff}^2$ (I_{eff} est la valeur efficace du courant circulant dans l'antenne). Faire l'application numérique.

Formulaire : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 1,22.$

Exercice 5 : Diffusion par un atome

Un atome d'hydrogène H est placé à l'origine O d'un repère d'espace cartésien (Oxyz). On suppose que le proton est immobile en O. L'électron, de charge $-e$ et de masse m est repéré par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x, y, z). On note $\vec{v}$ son vecteur vitesse. On suppose que :

- l'électron n'est pas relativiste
- l'électron est lié au proton par une force de rappel élastique $\vec{F_r} = -m\omega_0^2\overrightarrow{OM}$
- on tient compte de la perte d'énergie de l'électron par rayonnement en introduisant une force de frottement de type fluide $\vec{F} = -\dfrac{m}{\tau}\vec{v}$
- l'atome est placé dans une OPPM électromagnétique de pulsation ω, rectilignement polarisée selon $\vec{u}_z$ et se propageant dans la direction $+\vec{u}_x$.

Le champ électrique de l'onde en notation complexe s'écrit donc : $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\exp[i(\omega t - kx)]\vec{u}_z$. avec $E_0 > 0$. Exepté l'atome d'hydrogène, tout l'espace est vide donc on suppose que cette onde se propage dans le vide.

1. Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$ associé à cette onde.
2. Montrer que la force magnétique exrercée par l'onde sur l'électron est négligeable devant la force électrique.
3. En se placant dans le domaine optique, justifier que le champ puisse être considéré comme uniforme à l'échelle de l'atome. En déduire que la force exercée par l'onde sur l'électron peut s'écrire : $\vec{F_e} = -e\vec{E}(0,t)$.
   Astuce : Évaluer et comparer la taille caractéristique de l'atome et la longueur d'onde.
4. Appliquer le PFD à l'électron. Montrer que pour $t \gg \tau$ (après le régime transitoire), le mouvement forcé de l'électron se fait uniquement suivant $\vec{u}_z$.
5. Déterminer l'expression de $\underline{z}(t)$.

L'atome d'hydrogène se comporte alors comme un dipôle électrique oscillant, de moment

$$\vec{p}(t) = -e\,\underline{z}(t)\,\vec{u_z} = \underline{p}_0 e^{i\omega t}\vec{u}_z$$

On rappelle que dans ce cas, le champ électromagnatique rayonné s'écrit en notation complexe et dans la zone de rayonnement :

$$\underline{\vec{E}}_r(M,t) = -\frac{\mu_0\underline{p}_0\omega^2\sin\theta}{4\pi r}\exp[i(\omega t - kr)]\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_r(M,t) = -\frac{\mu_0\underline{p}_0\omega^2\sin\theta}{4\pi rc}\exp[i(\omega t - kr)]\vec{u}_\varphi$$

6. Déterminer la valeur moyenne $\langle\vec{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting de l'onde rayonnée.

7. En déduire la puissance électromagnétique moyenne rayonnée $\mathcal{P}_{ray}$. On montrera qu'elle se met sous la forme :

$$\mathcal{P}_{ray} = K\frac{\omega^4}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\dfrac{\omega^2}{\tau^2}}$$

avec K une constante à exprimer en fonction de E_0, e, m, c et ε_0.

8. ω_0 et $\dfrac{1}{\tau}$ étant du même ordre de grandeur, quelle est la forme approchée de $\mathcal{P}_{ray}$ lorsque $\omega \ll \omega_0$ (diffusion Rayleigh) ? Et si $\omega \gg \omega_0$ (diffusion Thomson) ?