TD n°23
Mécanique quantique

Exercice 1 : Modèle de Bohr

Pour expliquer la stabilité de l'atome, Bohr imagina que les électrons devaient se déplacer sur des orbites circulaires. Sur la première orbite, de rayon a_0, la quantité de mouvement de l'électron vérifie $p_0 = \dfrac{\hbar}{a_0}$.

1. Afin qu'il soit possible de parler de trajectoire au sens classique du terme, quelles limitations doit-on imposer aux indéterminations Δp et Δr pour l'orbite de Bohr considérée ?
2. Montrer que ces indéterminations sont incompatibles avec l'inégalité de Heisenberg spatiale.
3. Que peut-on conclure sur le modèle de Bohr ?

Exercice 2 : Largeur spectrale

Un atome se trouve dans un état excité dont l'énergie est supérieure à celle du niveau fondamental de 4,7 eV. Le temps de vie de cet état excité est de $1{,}0 \times 10^{-13}$ s.

1. Déterminer la fréquence et la longueur d'onde du rayonnement émis lors de la désexcitation de l'atome.
2. Quelle est l'indétermination minimale sur l'énergie du photon émis lorsque l'atome se désexcite ?
3. En déduire la largeur spectrale de la raie d'émission correspondante (on l'exprimera à la fois en termes de fréquences et de longueur d'onde).

Exercice 3 : Oscillateur harmonique quantique

Soit une particule quantique de masse m, soumise à une énergie potentielle de la forme $V(x) = \dfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2$. Dans un état stationnaire d'énergie E, la fonction d'onde de cette particule s'écrit :

$$\psi(x,t) = \phi(x)\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

avec, dans l'état fondamental, $\phi(x) = A\exp\left(-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$, A étant une constante de normalisation et a une largeur caractéristique.

1. Déterminer la constante de normalisation A.
2. Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule. En déduire (sans calculs) la valeur de la position moyenne $\langle x \rangle$ de la particule.
3. Calculer l'indétermination quantique Δx sur la position.
4. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans le cas considéré.
5. Déterminer alors l'expression de l'énergie E et de a en fonction de $\hbar$, ω_0, et de m.

Données : on admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\alpha u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$

Exercice 4 : Puits de potentiel infini

On considère une particule quantique de masse m dans un puits de potentiel infiniment profond, de largeur a.

1. Représenter l'allure de la fonction d'onde propre pour les trois premiers niveau d'énergie de cette particule.
2. En déduire, dans chaque cas, l'expression de la longueur d'onde de De Broglie.
3. Déterminer également l'expression de l'énergie E dans chaque cas en fonction de a, $\hbar$ et de la masse m de la particule.
4. En généralisant, trouver l'expression de l'énergie E_n du n^{ieme} niveau en fonction de n, m, a et $\hbar$.

Exercice 5 : Marche de potentiel

On étudie le mouvement d'une particule quantique dans le potentiel $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ région (I)} \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \text{ région (II)} \end{cases}$$

On commence par étudier une particule d'énergie $E > V_0$. On pose $k_1 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ et $k_2 = \sqrt{\dfrac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$.

1. Montrer qu'un état stationnaire de la particule peut être représenté par la fonction d'onde propre $\phi(x) = A\exp(ik_1x) + rA\exp(-ik_1x)$ dans la région I et par $\phi(x) = tA\exp(ik_2x)$ dans la région II. A est une constante non nulle et r et t respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.
2. Écrire les équations de raccordement en $x = 0$ et en déduire les expressions de r et t. Que se passe-t-il si $E \gg V_0$?

On se place maintenant dans le cas $E < V_0$. L'expression de k_1 et la fonction d'onde propre dans la région I peuvent être conservées.

3. Comment est modifiée k_2 ? En déduire les nouveaux coefficients r et t. Que vaut alors la probabilité de réflexion R de la particule ?

Exercice 6 : Barrière de potentiel

Soit le potentiel $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -a/2 \text{ (I)} \\ V_0 & \text{pour } -a/2 \leq x \leq a/2 \text{ (II)} \\ 0 & \text{pour } x > a/2 \text{ (III)} \end{cases}$ dans lequel évolue une particule de masse m et d'énergie $E > 0$. On se limite au cas où $E > V_0$, on pose $k = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ et $K = \sqrt{\dfrac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$.

1. Décrire qualitativement le mouvement de la particule dans le cas de la mécanique classique.

Si la particule est quantique, son état est décrit par la fonction d'onde $\psi(x,t) = \phi(x)\exp\left(-\dfrac{iEt}{\hbar}\right)$.

2. Établir les équations différentielles vérifiées par ϕ dans les trois régions et proposer une forme de ϕ dans chacune des trois régions (pas de particules provenant de la région III). On précisera les conditions limites et les conditions de raccordement.

Ces conditions de raccordement permettent de déduire les expressions des probabilités de réflexion R et de transmission T par la barrière. On donne :

$$T = \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2\left(\dfrac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)}\right)}$$

3. Déterminer l'expression de R à partir de celle de T donnée.
4. Représenter l'allure de R et T en fonction de E pour $E > V_0$. Commenter.

Des électrons, d'énergie $E = 10\,\mathrm{eV}$ arrivent sur une barrière de potentiel telle que $V_0 = 4\,\mathrm{eV}$.

5. Déterminer les épaisseurs de la barrière telles que la transmission soit totale. Comparer ces valeurs à la longueur d'onde de De Broglie des électrons dans la barrière.
6. La barrière est maintenant d'épaisseur $a = 0{,}4\,\mathrm{nm}$. Déterminer l'intensité du courant transmis si le courant incident est $I = 1\,\mathrm{mA}$.

Exercice 7 : Superposition dans un puits

Une particule de masse m et d'énergie $E > 0$ est placée dans un puits infini de potentiel situé entre $x = 0$ et $x = a$. Cette particule se trouve dans une superposition de deux états :

$$\psi(x,t) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-iE_1 t/\hbar} + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

avec $E_n = n^2 \dfrac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$.

1. En cherchant une solution stationnaire $\psi(x,t) = \phi(x) \cdot u(t)$, montrer que son énergie est quantifiée et justifier l'expression proposée pour E_n.
2. Établir la relation entre A_1 et A_2.
3. Pour la suite, on prendra $A_1 = A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, vérifier que ces valeurs conviennent.
4. Représenter $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ pour des valeurs de t bien choisies.
5. Quelle est la période T des oscillations quantiques ?
6. Calculer et commenter le produit $\Delta E \cdot T$ où ΔE est l'incertitude sur l'énergie.