

DM 1

Électronique, physique statistique

Exercice 1 : Filtrage électronique

I – Fonction de transfert

On considère un filtre de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec ω_0 la pulsation propre du filtre correspondant à une fréquence propre $f_0 = 2 \text{ kHz}$, $Q = 10$ le coefficient de qualité et $H_0 = 10$ le gain statique.

- Q.1** Étudier le comportement de la fonction de transfert en haute et en basse fréquence et en déduire la nature du filtre.
- Q.2** Déterminer les expressions du gain et de la phase de la fonction de transfert.
- Q.3** Tracer les diagrammes de Bode (gain et phase) asymptotiques et réels.

II – Filtre RLC série

On se propose de vérifier qu'un filtre RLC série présente la même fonction de transfert.

- Q.4** On envisage dans un premier temps trois résistances R_1 , R_2 et R_3 placées en série et alimentées par une tension d'entrée continue U_e . Déterminer avec soin l'expression de la tension U_s aux bornes de R_1 .
- Q.5** Retrouver, en justifiant, les expressions des impédances complexes pour un condensateur de capacité C et pour une bobine d'inductance propre L .
- Q.6** On alimente un circuit RLC série par une tension sinusoïdale $\underline{u}_e$ de pulsation ω et la tension de sortie $\underline{u}_s$ est prise aux bornes de la résistance. On notera R , L et C les valeurs des composants. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit de la même manière que la fonction de transfert précédente en exprimant H_0 , Q et ω_0 en fonction de R , L et C .

III – Réponse à une entrée sinusoïdale

On envoie un signal sinusoïdal $\underline{u}_e = U_e e^{2j\pi f_e t}$ avec $U_e = 1,0 \text{ V}$ sur le filtre étudié. On a toujours $f_0 = 2 \text{ kHz}$, $Q = 10$ et $H_0 = 10$.

- Q.7** Déterminer la tension de sortie $u_s(t)$ pour $f_e = f_0$. Tracer sur le même graphe l'allure de $u_e(t)$ et $u_s(t)$.
- Q.8** On se place dans le cas $f_e = 20 \text{ kHz}$ (on admet que l'approximation $f_e \gg f_0$ est valide).
 - a) Déterminer une expression approchée du gain G dans ce cas. Montrer que la phase φ a une valeur proche de $-\frac{\pi}{2}$.
 - b) Montrer que la fonction de transfert s'écrit $\underline{H}(j\omega) \simeq -\frac{j}{\tau\omega}$ avec τ à exprimer en fonction des constantes. Faire l'application numérique.
 - c) Déterminer la tension de sortie $u_s(t)$ en utilisant l'expression approchée de la fonction de transfert. Tracer sur le même graphe l'allure de $u_e(t)$ et $u_s(t)$.

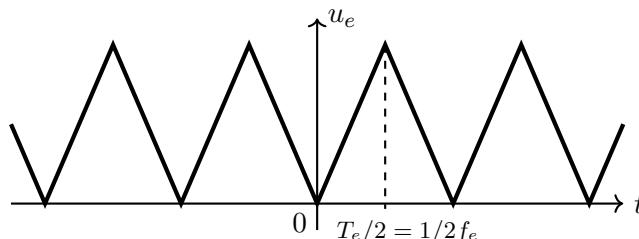
Q.9 On se place dans le cas $f_e = 200 \text{ Hz}$ (on admet que l'approximation $f_e \ll f_0$ est valide).

- Montrer que la fonction de transfert s'écrit $\underline{H}(j\omega) \simeq j\tau'\omega$ avec τ' à exprimer en fonction des constantes. Faire l'application numérique.
- Déterminer la tension de sortie $u_s(t)$ en utilisant l'expression approchée de la fonction de transfert. Tracer sur le même graphe l'allure de $u_e(t)$ et $u_s(t)$.

IV – Réponse à une entrée triangulaire

On envoie sur le filtre une tension triangulaire $u_e(t)$ variant entre 0 et $E_0 = 10 \text{ V}$, de fréquence fondamentale f_e . On donne la décomposition en série de Fourier de cette tension ainsi que sa représentation :

$$u_e(t) = E_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin(2\pi(2n+1)f_e t) \right]$$



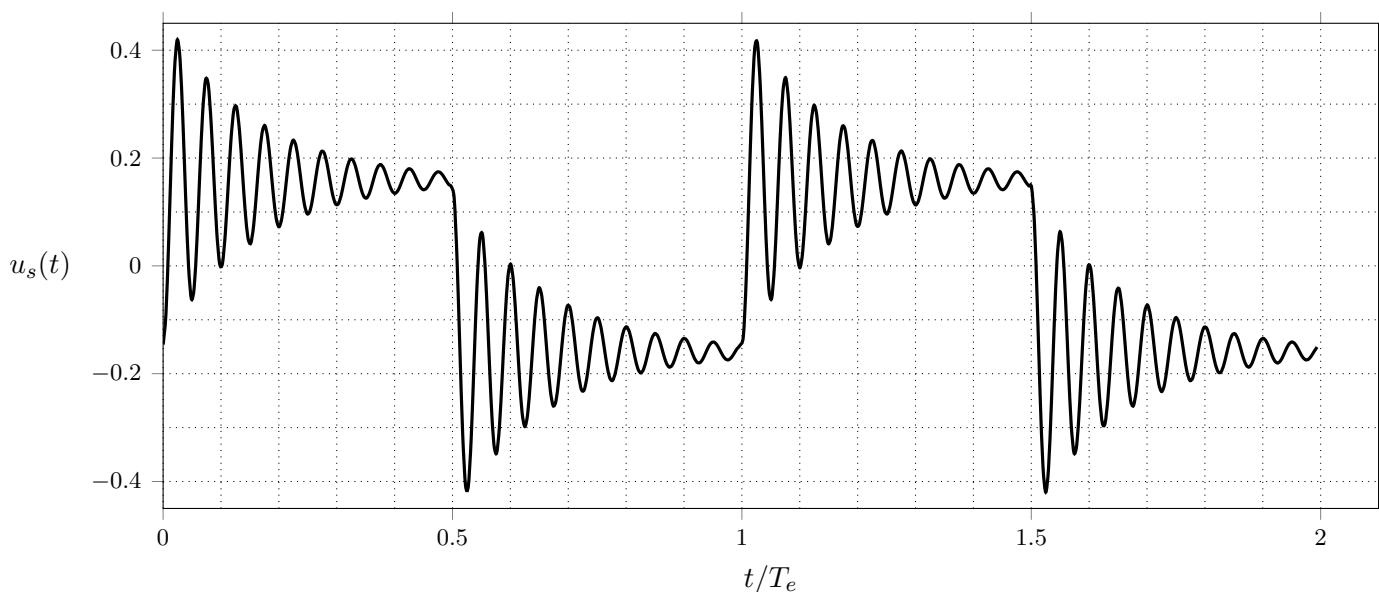
Q.10 Déterminer la valeur moyenne (composante continue) de ce signal, notée u_0 . Que devient cette composante continue après passage dans le filtre ? (justifier la réponse).

Q.11 On étudie le cas $f_e = f_0$. Comparer, pour le signal de sortie, les amplitudes du fondamental et de l'harmonique de rang 1. Tracer sur le même graphe l'allure de $u_e(t)$ et $u_s(t)$.

Q.12 On étudie le cas $f_e = 20 \text{ kHz}$. D'après les questions précédentes, tracer en justifiant l'allure de $u_e(t)$ et $u_s(t)$ sur le même graphe. On prendra $u_s(t=0) = 0$.

Q.13 On se place dans le cas $f_e = 100 \text{ Hz}$ et on obtient la tension de sortie ci-dessous.

- Pourquoi n'est-il pas possible d'utiliser ici la fonction de transfert approchée $\underline{H}(j\omega) \simeq j\tau\omega$?
- Écrire, sans aucune approximation, l'équation différentielle du deuxième ordre entre $u_s(t)$ et $u_e(t)$.
- Déterminer, entre $t = 0$ et $t = T_e/2$, la solution particulière de cette équation différentielle. Le résultat obtenu est-il conforme au graphe fourni ?



Exercice 2 : Contribution électronique à la capacité thermique d'un gaz

La capacité thermique d'un gaz est la somme de contributions provenant des énergies de translation, de rotation et de vibration des molécules, mais également de l'énergie des électrons.

Q.1 Les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène sont donnés par : $E_n = -\frac{13.6}{n^2}$ eV avec n un entier supérieur ou égal à 1.

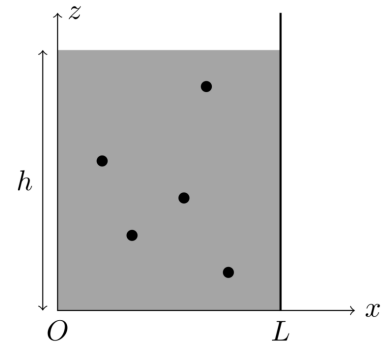
- Quelle est la différence d'énergie Δ entre l'état fondamental et le niveau excité ?
- Le niveau d'énergie E_n comporte $2n^2$ états quantiques différents (sa dégénérescence est $g_n = 2n^2$). Chaque état quantique étant peuplé par l'agitation thermique en suivant la loi de Boltzmann, calculer le rapport $\frac{N_2}{N_1}$ du nombre d'atomes d'hydrogène dans le premier niveau sur le nombre d'atomes au niveau fondamental, à l'équilibre à la température $T = 298$ K.
- Quelle est alors l'influence des niveaux d'énergie électroniques sur la capacité thermique de l'hydrogène atomique à température ordinaire ?

Q.2 La plupart des atomes ont, comme l'atome d'hydrogène, des niveaux d'énergie électroniques trop élevés pour qu'ils soient peuplés par l'agitation thermique aux températures ordinaires. Les atomes halogènes font exception : l'atome de chlore possède un niveau électronique fondamental de dégénérescence $g_1 = 4$ et un premier niveau d'énergie de dégénérescence $g_2 = 2$ dont la différence d'énergie est $\Delta = 0,109$ eV seulement. On ne tiendra compte dans la suite que de ces deux niveaux d'énergie.

- Calculer le rapport $\frac{N_2}{N_1}$ du nombre d'atomes de chlore dans le premier niveau sur le nombre d'atomes au niveau fondamental, à l'équilibre à la température $T = 298$ K. On prendra l'énergie du niveau fondamental nulle.
- Exprimer, en fonction de Δ et $k_B T$, l'énergie électronique moyenne $\langle E_{el} \rangle$ d'un atome de chlore en équilibre avec un thermostat à la température T .
- En déduire la contribution, notée C_m^{el} , de l'énergie électronique à la capacité thermique molaire du chlore gazeux. Exprimer cette contribution en fonction de R , T et $\Theta_{el} = \frac{\Delta}{k_B}$.
- Tracer l'évolution de C_m^{el} en fonction de T/Θ_{el} . Vérifier que C_m^{el} passe par un maximum pour $T_m \approx 0,45\Theta_{el}$ et calculer numériquement Θ_{el} et $C_m^{el}(T_m)$.

Exercice 3 : Expérience de Jean Perrin (facultatif)

Au début du XX^e siècle, Jean Perrin a mesuré le nombre d'Avogadro en introduisant des sphérules (toutes petites sphères) de caoutchouc végétal dans une cuve remplie d'eau maintenue à une température constante T . La cuve est un parallélépipède de base carrée (longueur L selon Ox et Oy) et de hauteur h selon Oz . On note N le nombre total de sphérules introduites.



- Q.1** Chaque sphérule est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède qu'elle subit de la part de l'eau.
- Exprimer l'énergie potentielle totale d'une sphérule $\varepsilon_p(z)$ en fonction de son altitude z au dessus du fond de la cuve et la mettre sous la forme $\varepsilon_p(z) = m^*gz$ en précisant l'expression de m^* .
 - Application numérique : calculer $\varepsilon_p(h)$, énergie potentielle au sommet de la cuve.
- Q.2** On suppose que les sphérules obéissent à la statistique classique de Boltzmann. Calculer la fonction de partition d'une particule. Compte-tenu de la valeur numérique obtenue à la question précédente, simplifier l'expression obtenue.
- Q.3** Calculer la probabilité $\delta p(z)$ pour qu'une sphérule soit située dans une tranche de la cuve délimitée par les altitudes z et $z + dz$, quelle que soit sa vitesse. En déduire le nombre moyen $\delta N(z)$ de sphérules situées entre z et $z + dz$, en fonction de R , T , r , ρ , ρ_{eau} , g , z et dz .
- Q.4** Jean Perrin a divisé la cuve en tranches de très petite épaisseur e , situées à différentes altitudes z_i qu'il a observé au microscope en prenant des photos de chaque tranche. Il a pu en déduire le nombre moyen N_i de sphérules dans chaque tranche. Ses résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

z_i (μm)	5	35	65	95
N_i	100	47	23	12

Déduire de ces mesures une valeur de la constante de Boltzmann, puis du nombre d'Avogadro.

Données : rayon d'une sphérule $r = 0,212 \mu\text{m}$; masse volumique des sphérules $\rho = 1,1942 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; masse volumique de l'eau $\rho_{eau} = 1,003 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $T = 293 \text{ K}$; $h = 100 \mu\text{m}$.

On donne la statistique classique de Boltzmann qui indique que la probabilité de trouver une particule assimilée à un point matériel de masse m dans un élément de volume élémentaire $dV = dxdydzdv_xdv_ydv_z$ de l'espace des phases centré sur le point $P(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ est donnée par :

$$\delta p = C \exp \left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right) \exp \left(-\frac{\varepsilon_p(x, y, z)}{k_B T} \right) dV$$

où ε_p est l'énergie potentielle de la particule et C la constante de normalisation.

Formulaire : pour $\alpha > 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} u^3 e^{-\alpha u^2} du = \frac{1}{2\alpha^2}$$