DS 2 (2 heures)

Électronique (CCP), Physique statistique

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

Critère	**Indicateur**
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respéctés	**Palier de Malus**	**Effet sur la note**
0	0	aucun
1–2	1	-3.3%
3–4	2	-6.7%
5–6	3	-10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Effets de moyenne en électronique

I – Préliminaires

Le développement en série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ peut parfois s'obtenir à l'aide de formules trigonométriques simples.

Q.1 On considère la fonction périodique $f(t) = \cos(\omega t)\,\cos(\omega t + \varphi)$.
a) Déterminer son développement en série de Fourier et préciser la pulsation fondamentale et les harmoniques éventuels.
b) Quel lien existe-t-il entre la composante continue d'un tel développement et la valeur moyenne $< f(t) >$ pendant une période ?

Q.2 On considère maintenant la somme de deux sinusoïdes de même pulsation ω, présentant entre elles un déphasage φ : $g(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t + \varphi)$. Exprimer la moyenne $< g^2(t) >$ du carré de cette somme.

Q.3 On considère deux sinusoïdes de pulsations différentes : ω et Ω. On note $p(t) = \cos(\omega t)\cos(\Omega t + \varphi)$ leur produit et $s(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(\Omega t + \varphi)$ leur somme.
a) Exprimer la moyenne $< p(t) >$ du produit de ces deux sinusoïdes.
b) En déduire la moyenne $< s^2(t) >$ du carré de la somme.

II – Effets de moyenne en électrocinétique

Une tension périodique $v(t) = V_0\cos^2(\omega t)$ est appliquée à l'entrée d'un circuit RC série.

Q.4 Démontrer que la tension $u(t)$ mesurée aux bornes du condensateur de capacité C est solution de l'équation différentielle :

$$u + \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}V_0\cos(2\omega t)$$

et préciser l'expression de la constante de temps τ en fonction de R et de C.

La solution de cette équation différentielle en régime forcé (ou établi) peut s'écrire comme la somme des solutions particulières des équations différentielles suivantes :

$$u + \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}V_0 \quad \text{et} \quad u + \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}V_0\cos(2\omega t)$$

Q.5 Déterminer la solution en régime établi pour la première équation.

Q.6 A l'aide de la notation complexe, préciser la solution de la deuxième équation en régime établi. Écrire cette solution sous forme réelle et démontrer qu'elle a une amplitude qui tend vers zéro lorsque $RC \gg \dfrac{1}{2\omega}$.

Q.7 Dans le cas où $\omega = 100\pi\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, déterminer la condition, concernant la résistance R, qui permet d'obtenir, en régime établi, aux bornes d'un condensateur de capacité $C = 100\,\mu\mathrm{F}$, une tension telle que l'ondulation ait une amplitude inférieure au centième de la composante continue.

Q.8 Donner l'expression de la solution réelle complète pour $u(t)$ dans le cas général, en supposant que le condensateur ne porte aucune charge à l'instant $t = 0$.

III – Détection synchrone

Un signal harmonique $v(t) = V_0\cos(\omega t)$ dont on veut mesurer l'amplitude est bruité par un signal parasite $u(t) = U_0\cos(\Omega t + \varphi)$ de fréquence différente. Alors, la mesure effectivement obtenue se trouve être égale à la somme : $s(t) = V_0\cos(\omega t) + U_0\cos(\Omega t + \varphi)$.

Q.9 Au moyen de procédés électroniques connus, on multiplie dans un premier temps le signal $s(t)$ par un signal auxiliaire synchrone au signal d'intérêt : $w(t) = W_0 \cos(\omega t + \phi)$ puis on effectue la moyenne du produit obtenu. Exprimer cette moyenne $\mu =< s(t) \cdot w(t) >$.

Q.10 Pour conclure, on règle à 2 V l'amplitude du signal auxiliaire puis l'on fait varier son déphasage ϕ jusqu'à obtenir une moyenne maximale. Pour quelle valeur de ϕ ce maximum est-il atteint ? Quelle est sa relation avec l'amplitude recherchée ?

Exercice 2 : Capacité thermique des gaz

La capacité thermique des gaz est une grandeur thermodynamique assez facile à mesurer expérimentalement. Elle a joué un grand rôle dans la compréhension de la nature microscopique des gaz et de la matière en général. Elle a également été un point de questionnement fondamental au moment de la construction de la physique quantique. Dans cette épreuve, on se propose d'expliquer à l'aide de différents modèles théoriques les valeurs mesurées de la capacité thermique de différents gaz parfaits diatomiques à différentes températures.

I – De la molécule à l'oscillateur harmonique

On considère une molécule diatomique dont les deux atomes A et B sont liés par une liaison covalente : l'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est attractive à longue portée et répulsive à courte portée. L'étude est menée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose la molécule isolée et on néglige l'interaction gravitationnelle entre les deux atomes devant l'interaction conduisant à la liaison covalente.

Q.1 Tracer l'allure du profil d'énergie potentielle E_p de cette molécule en fonction de la longueur $\ell = AB$ de la liaison. On y fera figurer la longueur d'équilibre ℓ_e de la liaison et l'énergie de liaison E_ℓ.

Q.2 Donner un ordre de grandeur de ℓ_e en nm et de E_ℓ en $\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.

Q.3 Compte tenu de l'allure de la courbe de la **Q.1**, et moyennant une hypothèse à préciser, justifier que l'on peut assimiler la liaison covalente à un ressort dont on exprimera la constante de raideur k en fonction d'une dérivée de E_p.

On suppose cette approximation valide dans toute la suite.

Q.4 Exprimer l'énergie cinétique de la molécule en fonction des vitesses $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ et des masses m_A et m_B des atomes A et B dans le référentiel du laboratoire.

Q.5 Énoncer le théorème d'équipartition de l'énergie.

Q.6 Calculer un ordre de grandeur de la vitesse caractéristique des molécules dans l'air à 300 K et sous une pression de 1 atm. On prendra $R = \frac{25}{3} \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ pour valeur de la constante des gaz parfait et $M_a = 30 \times 10^{-3} \mathrm{\, kg \cdot mol^{-1}}$ pour la masse molaire de l'air.

Q.7 Exprimer l'énergie mécanique E_m de la molécule dans le référentiel du laboratoire, en fonction de E_ℓ, ℓ, ℓ_e, k, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ et des masses m_A et m_B.

Q.8 On note G le barycentre de la molécule tel que $m_A\overrightarrow{GA} + m_b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $\vec{v}_G$ sa vitesse dans le référentiel du laboratoire. On appelle référentiel barycentrique, le référentiel ayant les mêmes vecteurs de base que le référentiel du laboratoire mais d'origine G. Ce référentiel est-il galiléen ? On justifiera sa réponse.

Q.9* On note $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}$, établir la relation $E_m + E_\ell = \frac{1}{2}\left(m\|\vec{v}_G\|^2 + \mu\|\vec{v}\|^2 + kr^2\right)$ dans laquelle on exprimera les constantes m et μ en fonction des masses m_A et m_B ainsi que la variable r en fonction de ℓ et ℓ_e. Pour

exprimer $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ en fonction de $\vec{v}_G$ et $\vec{v}$, on pourra commencer par exprimer $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Q.10★ En écrivant $\overrightarrow{AB} = \ell(t)\vec{e}_r$, avec $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, décomposer E_m en la somme de trois termes que l'on supposera indépendants dans ce problème et qui représentent respectivement les énergies de translation E_t, de vibration E_v et de rotation E_r de la molécule. On explicitera chacun de ces termes en fonction des grandeurs les plus adaptées.

II – Capacité thermique d'un gaz parfait diatomique

On s'intéresse maintenant à un gaz parfait de N molécules diatomiques identiques. On cherche à déterminer l'expression de la capacité thermique de ce gaz en exploitant le modèle développé dans la partie précédente.

Q.11 Exprimer l'énergie interne U de cet ensemble de particules en fonction de N et de l'énergie moyenne d'une molécule $\langle E_m \rangle$.

Q.12 Montrer que dans le modèle classique développé dans la première partie, la capacité thermique molaire $c_{V,m}$ du gaz est une constante que l'on exprimera en fonction de R.

La FIGURE 1 présente les relevés expérimentaux de la capacité thermique molaire du dichlore Cl_2 gazeux et du dihydrogène H_2 gazeux à diverses températures.

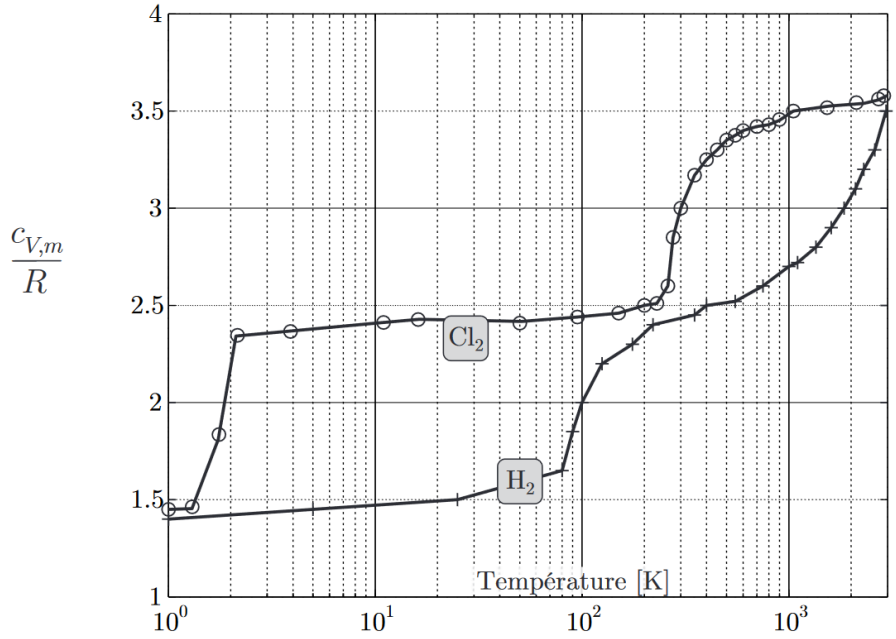

FIGURE 1 – Mesures de la capacité thermique molaire du dichlore (Cl_2) et du dihydrogène (H_2) gazeux en fonction de la température.

Q.13 Commenter les deux courbes de la FIGURE 1 au vu des prédictions théoriques obtenues précédemment.

III – Capacité thermique et quantification

Comme dans la seconde partie, on s'intéresse à un ensemble de N molécules diatomiques identiques. Ce gaz est à l'équilibre thermique à la température T. La probabilité $\pi(E_n)$ qu'une molécule de ce gaz se trouve dans un état d'énergie E_n s'écrit :

$$\pi(E_n) = Ae^{-\beta E_n}$$

où β est une fonction de k_B et de T uniquement. Contrairement à la seconde partie où l'on avait utilisé l'expression classique de l'énergie, on utilise maintenant l'expression de l'énergie de l'oscillateur harmonique :

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

On appelle constante de Planck réduite la grandeur $\hbar$, telle que $2\pi\hbar = h$. C'est Albert Einstein qui eût cette idée le premier en 1907 afin de tenter de régler certains problèmes de la physique classique dans le traitement du comportement des solides à basse température. L'idée est ici la même, mais rend compte de la vibration des molécules diatomiques.

Q.14 Exprimer β en fonction de k_B et de T puis la constante A en fonction de $\hbar$, ω et β.

Q.15 En déduire l'expression de l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ de l'ensemble de ces N particules en fonction de $\hbar$, ω, β et N.

Q.16 Montrer que la capacité thermique molaire à volume constant $c_{V,m}$ de ce gaz s'écrit :

$$c_{V,m} = R\frac{\xi^2}{\sinh^2(\xi)} \quad \text{avec } \xi = \frac{\beta\hbar\omega}{2}$$

On désigne par T_v la température, dite de vibration, caractéristique des vibrations de la molécule qui est telle que $T_v = \dfrac{\hbar\omega}{k_B}$.

Q.17 Réécrire l'expression de $c_{V,m}$ en fonction de T_v et T.

Q.18 La table ci-dessous fournit la température de vibration de quelques molécules diatomiques. Quelle partie des mesures présentées sur la FIGURE 1 le modèle est-il censé représenter ? La théorie est-elle en accord avec l'expérience ? On pourra s'aider de la FIGURE 2 ci–dessous qui représente l'allure de la fonction $\chi(u) = \dfrac{u^{-2}}{\sinh^2(u^{-1})}$.

Molécule	T_v en K
$^1H_2$	6220
$^2H_2$	4390
$^1H-^2H$	5380
Cl_2	808
Br_2	463
HCl	4230
HBr	3790

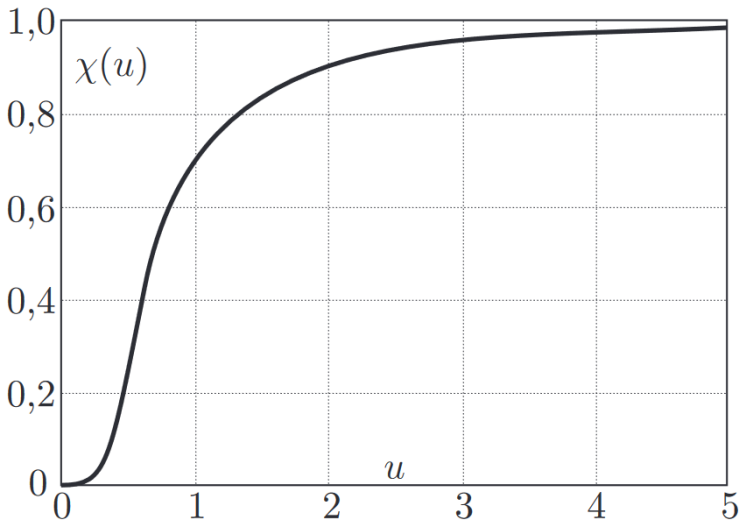

FIGURE 2 – Graphe de $\chi(u)$.

• • • FIN • • •