

**DS 2 (2 heures)**  
***Électronique (CCS), Physique statistique***

La calculatrice est **autorisée**

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte. Les résultats doivent être **encadrés**.

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie comme indiqué dans les tableaux suivants qui stipulent les critères et les effets sur la note le cas échéant :

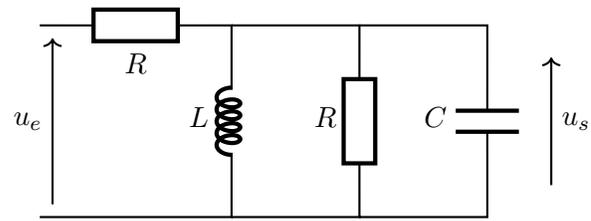
Critère	Indicateur
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie comporte peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrees.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

Nombre de critères non respectés	Palier de Malus	Effet sur la note
0	0	aucun
1–2	1	–3.3%
3–4	2	–6.7%
5–6	3	–10%

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## Exercice 1 : Étude paramétrique d'un filtre

On considère le circuit électronique suivant constitué de deux résistors identiques  $R$ , d'une bobine d'inductance  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . La tension d'entrée  $u_e$  est imposée par l'extérieur et on s'intéresse à la tension de sortie  $u_s$  aux bornes du condensateur.



### I – Caractérisation du filtre

**Q.1** Prévoyez le type de filtrage réalisé par le circuit proposé.

**Q.2** Établissez sa fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ .

**Q.3** Déduisez en les expressions du gain  $G_0$ , du facteur de qualité  $Q$  ainsi que de la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

On remplace maintenant la bobine d'inductance  $L$  par une autre d'inductance  $\frac{L}{\alpha\beta}$  et le condensateur de capacité  $C$  par un autre de capacité  $C\frac{\alpha}{\beta}$ .

**Q.4** Exprimez alors les nouvelles expressions du gain  $G'_0$ , du facteur de qualité  $Q'$  ainsi que de la pulsation propre  $\omega'_0$  en fonction de  $G_0$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Quel est l'intérêt des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ?

On choisit ensuite les valeurs de  $R$ ,  $L$  et  $C$  telles que  $Q = 1$  et  $\omega_0 = 2\pi \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q.5** Tracez le digramme de Bode en gain et en phase de ce filtre pour  $\beta = 1$  et pour différentes valeurs de  $\alpha$  :  $0,1$  ;  $1$  et  $10$ . Les asymptotes devront figurer sur vos courbes.

### II – Application du filtre à divers signaux non harmonique

On cherche à étudier la réponse de ce filtre pour des signaux d'entrée de type créneau ou triangulaire. On définit par morceaux les signaux périodiques suivants (période  $T$ ) :

$$u_c(t) = \begin{cases} E & \text{si } t \in [0, \frac{T}{2}[ \\ -E & \text{si } t \in [\frac{T}{2}, T[ \end{cases} \quad \text{et} \quad u_t(t) = \begin{cases} -E - 2E\frac{t}{T} & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, 0[ \\ -E + 2E\frac{t}{T} & \text{si } t \in [0, \frac{T}{2}[ \end{cases}$$

**Q.6** Représentez ces signaux sur le même graphique pour plusieurs périodes.

Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  du développement en série de Fourier d'un signal  $s(t)$  de période  $T$  sont donnés par les relations suivantes :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T s(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T s(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

**Q.7** Exprimez les coefficients  $a_{c,n}$  et  $b_{c,n}$  de la décomposition en série de Fourier du signal créneau.

**Q.8** Exprimez ensuite les coefficients  $a_{t,n}$  et  $b_{t,n}$  de la décomposition en série de Fourier du signal triangulaire.

**Q.9** On choisit  $\beta = 1$  et  $\alpha = 10$ . Quel sera le type du signal de sortie correspondant à un signal créneau d'entrée de fréquence 5 kHz. Votre réponse devra être justifiée à l'aide des réponses aux questions précédentes et vous effectuerez les approximations nécessaires.

**Q.10** Même question pour un signal triangle de fréquence  $f = 500$  Hz avec  $\alpha = 500$  et  $\beta = 2,5$ .

## Exercice 2 : Capacité thermique des gaz

La capacité thermique des gaz est une grandeur thermodynamique assez facile à mesurer expérimentalement. Elle a joué un grand rôle dans la compréhension de la nature microscopique des gaz et de la matière en général. Elle a également été un point de questionnement fondamental au moment de la construction de la physique quantique. Dans cette épreuve, on se propose d'expliquer à l'aide de différents modèles théoriques les valeurs mesurées de la capacité thermique de différents gaz parfaits diatomiques à différentes températures.

### I – De la molécule à l'oscillateur harmonique

On considère une molécule diatomique dont les deux atomes A et B sont liés par une liaison covalente : l'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est attractive à longue portée et répulsive à courte portée. L'étude est menée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose la molécule isolée et on néglige l'interaction gravitationnelle entre les deux atomes devant l'interaction conduisant à la liaison covalente.

**Q.1** Tracer l'allure du profil d'énergie potentielle  $E_p$  de cette molécule en fonction de la longueur  $\ell = AB$  de la liaison. On y fera figurer la longueur d'équilibre  $\ell_e$  de la liaison et l'énergie de liaison  $E_\ell$ .

**Q.2** Donner un ordre de grandeur de  $\ell_e$  en nm et de  $E_\ell$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**Q.3** Compte tenu de l'allure de la courbe de la **Q.1**, et moyennant une hypothèse à préciser, justifier que l'on peut assimiler la liaison covalente à un ressort dont on exprimera la constante de raideur  $k$  en fonction d'une dérivée de  $E_p$ .

On suppose cette approximation valide dans toute la suite.

**Q.4** Exprimer l'énergie cinétique de la molécule en fonction des vitesses  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  et des masses  $m_A$  et  $m_B$  des atomes A et B dans le référentiel du laboratoire.

**Q.5** Énoncer le théorème d'équipartition de l'énergie.

**Q.6** Calculer un ordre de grandeur de la vitesse caractéristique des molécules dans l'air à 300 K et sous une pression de 1 atm. On prendra  $R = \frac{25}{3} \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  pour valeur de la constante des gaz parfait et  $M_a = 30 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  pour la masse molaire de l'air.

**Q.7** Exprimer l'énergie mécanique  $E_m$  de la molécule dans le référentiel du laboratoire, en fonction de  $E_\ell$ ,  $\ell$ ,  $\ell_e$ ,  $k$ ,  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  et des masses  $m_A$  et  $m_B$ .

**Q.8** On note  $G$  le barycentre de la molécule tel que  $m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$  et  $\vec{v}_G$  sa vitesse dans le référentiel du laboratoire. On appelle référentiel barycentrique, le référentiel ayant les mêmes vecteurs de base que le référentiel du laboratoire mais d'origine  $G$ . Ce référentiel est-il galiléen ? On justifiera sa réponse.

**Q.9★** On note  $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$ , établir la relation  $E_m + E_\ell = \frac{1}{2} (m\|\vec{v}_G\|^2 + \mu\|\vec{v}\|^2 + kr^2)$  dans laquelle on exprimera les constantes  $m$  et  $\mu$  en fonction des masses  $m_A$  et  $m_B$  ainsi que la variable  $r$  en fonction de  $\ell$  et  $\ell_e$ . Pour exprimer  $\vec{v}_A$  et  $\vec{v}_B$  en fonction de  $\vec{v}_G$  et  $\vec{v}$ , on pourra commencer par exprimer  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$  en fonction de  $\overrightarrow{OG}$  et  $\overrightarrow{AB}$ .

**Q.10★** En écrivant  $\vec{AB} = \ell(t)\vec{e}_r$ , avec  $\vec{e}_r = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ , décomposer  $E_m$  en la somme de trois termes que l'on supposera indépendants dans ce problème et qui représentent respectivement les énergies de translation  $E_t$ , de vibration  $E_v$  et de rotation  $E_r$  de la molécule. On explicitera chacun de ces termes en fonction des grandeurs les plus adaptées.

## II – Capacité thermique d'un gaz parfait diatomique

On s'intéresse maintenant à un gaz parfait de  $N$  molécules diatomiques identiques. On cherche à déterminer l'expression de la capacité thermique de ce gaz en exploitant le modèle développé dans la partie précédente.

**Q.11** Exprimer l'énergie interne  $U$  de cet ensemble de particules en fonction de  $N$  et de l'énergie moyenne d'une molécule  $\langle E_m \rangle$ .

**Q.12** Montrer que dans le modèle classique développé dans la première partie, la capacité thermique molaire  $c_{V,m}$  du gaz est une constante que l'on exprimera en fonction de  $R$ .

La FIGURE 1 présente les relevés expérimentaux de la capacité thermique molaire du dichlore  $\text{Cl}_2$  gazeux et du dihydrogène  $\text{H}_2$  gazeux à diverses températures.

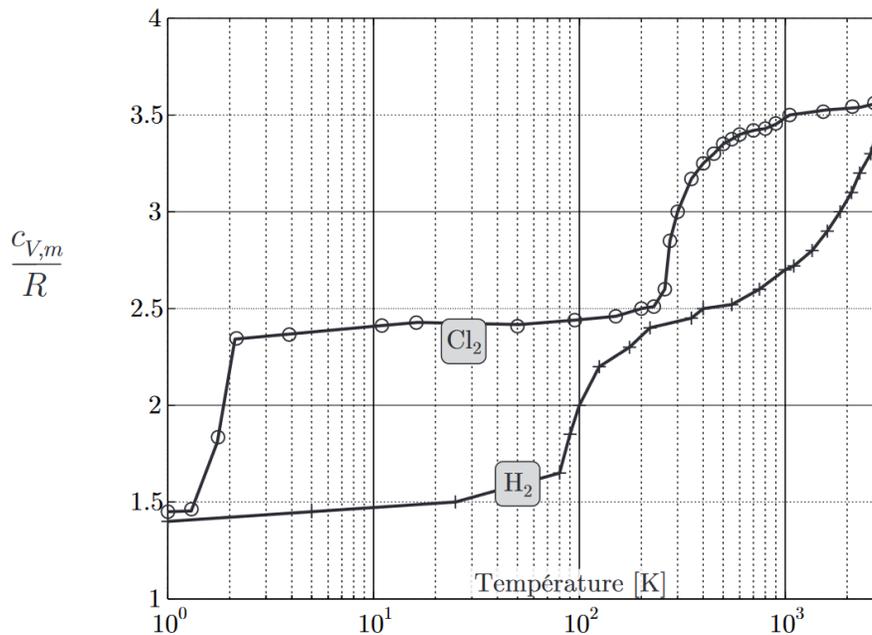


FIGURE 1 – Mesures de la capacité thermique molaire du dichlore ( $\text{Cl}_2$ ) et du dihydrogène ( $\text{H}_2$ ) gazeux en fonction de la température.

**Q.13** Commenter les deux courbes de la FIGURE 1 au vu des prédictions théoriques obtenues précédemment.

## III – Capacité thermique et quantification

Comme dans la seconde partie, on s'intéresse à un ensemble de  $N$  molécules diatomiques identiques. Ce gaz est à l'équilibre thermique à la température  $T$ . La probabilité  $\pi(E_n)$  qu'une molécule de ce gaz se trouve dans un état d'énergie  $E_n$  s'écrit :

$$\pi(E_n) = Ae^{-\beta E_n}$$

où  $\beta$  est une fonction de  $k_B$  et de  $T$  uniquement. Contrairement à la seconde partie où l'on avait utilisé l'expression classique de l'énergie, on utilise maintenant l'expression de l'énergie de l'oscillateur harmonique :

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

On appelle constante de Planck réduite la grandeur  $\hbar$ , telle que  $2\pi\hbar = h$ . C'est Albert Einstein qui eût cette idée le premier en 1907 afin de tenter de régler certains problèmes de la physique classique dans le traitement du comportement des solides à basse température. L'idée est ici la même, mais rend compte de la vibration des molécules diatomiques.

**Q.14** Exprimer  $\beta$  en fonction de  $k_B$  et de  $T$  puis la constante  $A$  en fonction de  $\hbar$ ,  $\omega$  et  $\beta$ .

**Q.15** En déduire l'expression de l'énergie moyenne  $\langle E \rangle$  de l'ensemble de ces  $N$  particules en fonction de  $\hbar$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  et  $N$ .

**Q.16** Montrer que la capacité thermique molaire à volume constant  $c_{V,m}$  de ce gaz s'écrit :

$$c_{V,m} = R \frac{\xi^2}{\sinh^2(\xi)} \quad \text{avec } \xi = \frac{\beta\hbar\omega}{2}$$

On désigne par  $T_v$  la température, dite de vibration, caractéristique des vibrations de la molécule qui est telle que  $T_v = \frac{\hbar\omega}{k_B}$ .

**Q.17** Réécrire l'expression de  $c_{V,m}$  en fonction de  $T_v$  et  $T$ .

**Q.18** La table ci-dessous fournit la température de vibration de quelques molécules diatomiques. Quelle partie des mesures présentées sur la FIGURE 1 le modèle est-il censé représenter ? La théorie est-elle en accord avec l'expérience ? On pourra s'aider de la FIGURE 2 ci-dessous qui représente l'allure de la fonction

$$\chi(u) = \frac{u^{-2}}{\sinh^2(u^{-1})}$$

Molécule	$T_v$ en K
$^1\text{H}_2$	6220
$^2\text{H}_2$	4390
$^1\text{H} - ^2\text{H}$	5380
$\text{Cl}_2$	808
$\text{Br}_2$	463
$\text{HCl}$	4230
$\text{HBr}$	3790

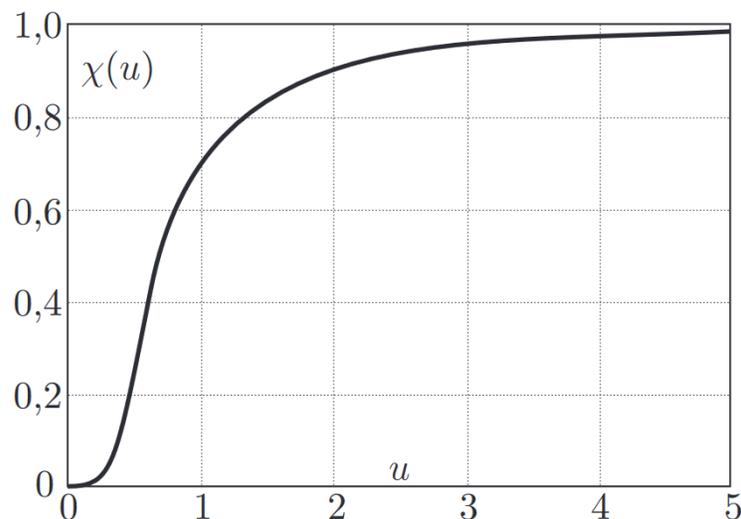


FIGURE 2 – Graphe de  $\chi(u)$ .

••• FIN •••