

## DM 5

### Électromagnétisme

#### Exercice 1 : Approximation des régimes quasi-stationnaires

L'objet de cet exercice est de dégager ce que recouvre l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme (notée dorénavant ARQS).

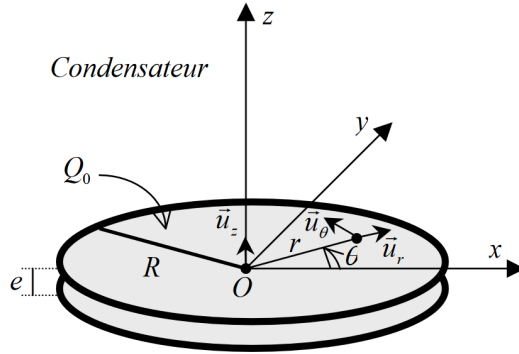


Figure 1. a

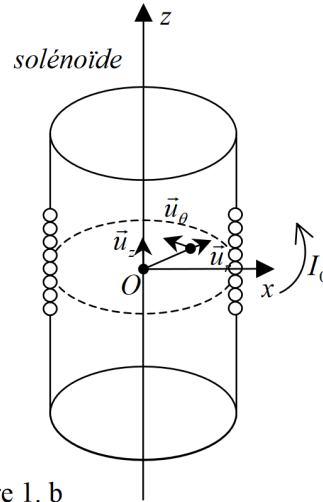


Figure 1. b

#### Formulaire :

- Formule sur les opérateurs vectoriels :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
- Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Constantes :  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q.1** Énoncer les équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Pour chacune d'entre elles, en donner la forme intégrale.

#### I – Condensateur plan en régime sinusoïdal forcé

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures planes de forme circulaire, d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $R$ , distantes de  $e$  (Figure 1.a). L'espace interarmatures est vide et la charge totale stockée sur l'armature supérieure du condensateur est donnée en notation complexe par :

$$\underline{Q}(t) = Q_0 e^{i\omega t}$$

avec  $Q_0$  réel positif). On suppose que  $R \gg e$ , de sorte à pouvoir négliger tout effet de bord. Vu la géométrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe d'axe  $(Oz)$ . On s'intéresse ici à un régime non stationnaire de fonctionnement, en l'occurrence un régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ .

**Q.2** Par une analyse des symétries et invariances du problème, déterminer la forme a priori du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  entre les armatures.

Un raisonnement en ordre de grandeur (non demandé) montre qu'il est légitime de négliger les effet de bords, donc de chercher le champ électromagnétique sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} &= E(r, t) \vec{u}_z \\ \vec{B} &= B(r, t) \vec{u}_\theta \end{cases}$$

**Q.3** Montrer à partir des équations de Maxwell que la fonction  $E(r, t)$  vérifie entre les armatures l'équation :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

On cherche les solutions complexes de la forme :  $\underline{E}(r, t) = E_0 f(r) e^{i\omega t}$  avec  $\omega$  la pulsation des oscillations et  $f(0) = 1$ . On définit la variable réelle  $u = \frac{\omega r}{c}$ .

**Q.4** Établir l'équation différentielle à laquelle obéit  $f(u)$ , qu'on ne cherchera pas à résoudre. La solution de cette équation s'écrit :

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{u}{2}\right)^{2k}$$

**Q.5** Par application de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer l'expression du champ magnétique complexe  $\underline{B}(r, t)$  en fonction de  $f(r)$  et des constantes du problème (on prendra la constante d'intégration nulle).

On désire maintenant trouver le développement perturbatif du champ électromagnétique à l'intérieur du condensateur. La forme du champ électromagnétique est la même que précédemment, puisque les hypothèses sont les mêmes. En particulier, les effets de bord sont négligés. Nous travaillons toujours en notation complexe.

L'idée fondamentale du traitement est la suivante : à l'ordre le plus bas, le champ électrique entre les armatures est approximativement uniforme (comme en électrostatique) soit en notation complexe :  $\vec{E}_0 = E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$  avec  $E_0$  réel. Comme ce champ varie au cours du temps, il crée un champ magnétique  $\vec{B}_1 = B_1(r, t) \vec{u}_\theta$  variable et non uniforme a priori. Ce champ magnétique engendre à son tour un champ électrique  $\vec{E}_2 = E_2(r, t) \vec{u}_z$ , qui crée lui même un champ magnétique  $\vec{B}_3 = B_3(r, t) \vec{u}_\theta$ , qui engendre  $\vec{E}_4 = E_4(r, t) \vec{u}_z$ , etc. Lors des intégrations successives, on ne retiendra que les solutions nulles sur l'axe.

**Q.6** Partant de la première expression approchée du champ électrique  $\vec{E}_0$ , déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_1$  par application de l'équation de Maxwell-Ampère.

**Q.7** La présence du champ magnétique modifie le champ électrique, en apportant le terme correctif  $\vec{E}_2$ . De quel phénomène s'agit-il ? À l'aide de l'équation de Maxwell appropriée, déterminer ce terme correctif  $\vec{E}_2$ .

**Q.8** Réitérer ce raisonnement pour aboutir à  $\vec{B}_3$  et  $\vec{E}_4$ .

**Q.9** Montrer alors que l'expression du champ électrique complexe  $\underline{E}(r, t)$  à l'ordre 4 en  $u = \frac{\omega r}{c}$  s'écrit :

$$\underline{E}(r, t) \approx E_0 \left( 1 - \frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{64} \right) e^{i\omega t}$$

**Q.10** Montrer que l'expression du champ magnétique complexe  $\underline{B}(r, t)$  à l'ordre 3 en  $u$  s'écrit :

$$\underline{B}(r, t) \approx i B_0 \left( \frac{u}{2} - \frac{u^3}{16} \right) e^{i\omega t}$$

on précisera l'expression de  $B_0$  en fonction de  $E_0$ .

**Q.11** Par application du théorème de Gauss à une surface bien choisie, déterminer l'expression de l'amplitude réelle  $E_0$  en fonction des paramètres du condensateur. Le théorème de Gauss étant valable à toute fréquence, on peut choisir de se placer à basse fréquence pour répondre à cette question. En déduire  $B_0$ .

## II – Solénoïde infini en régime sinusoïdal forcé

On cherche à déterminer le champ électromagnétique créé par un solénoïde infini, parcouru par une intensité  $\underline{I}(t) = I_0 e^{i\omega t}$  en notation complexe avec  $I_0$  un réel positif. Ce solénoïde de section circulaire comporte  $n$  spires jointives par unité de longueur.

**Q.12** Qu'entend-on par l'expression "solénoïde infini" ? Déterminer la forme a priori du champ magnétique.

D'après les hypothèses, on peut montrer qu'il est légitime de chercher le champ électromagnétique sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} &= E(r, t) \vec{u}_\theta \\ \vec{B} &= B(r, t) \vec{u}_z \end{cases}$$

**Q.13** Trouver l'équation à laquelle obéit  $B(r, t)$ .

Le principe est le même que précédemment : à l'ordre le plus bas, le champ magnétique dans le solénoïde est approximativement uniforme (comme en magnétostatique) soit en notation complexe :  $\vec{B}_0 = B_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$  avec  $B_0$  réel. Comme ce champ varie au cours du temps, il crée un champ électrique  $\vec{E}_1 = E_1(r, t) \vec{u}_\theta$ , etc.

**Q.14** Déduire de la partie précédente, l'expression approchée du champ magnétique à l'ordre 4 en  $u$ .

**Q.15** Par application de l'équation de Maxwell qui convient, déterminer  $\underline{E}_1(r, t)$  et en déduire l'expression du champ électrique à l'ordre 3 en  $u$ .

**Q.16** Quel est le domaine fréquentiel de validité du théorème d'Ampère ? Par application du théorème d'Ampère à un contour bien choisi, déterminer l'amplitude réelle  $B_0$  en fonction des paramètres du solénoïde.

## III – Approche énergétique

On fait maintenant l'hypothèse d'un régime lentement variable, c'est-à-dire que l'on suppose que  $u = \frac{\omega r}{c} \ll 1$  dans toutes les expressions calculées ci-dessus. On suppose négligeables tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans les expressions des champs.

**Q.17** Evaluer en ordre de grandeur le domaine de fréquences correspondant à cette approximation pour les composants utilisés usuellement en montage d'électricité ou d'électronique. Cette approximation vous semble-t-elle raisonnable ?

**Q.18** D'après ce qui précède, donner l'expression du champ électromagnétique réel  $(\vec{E}, \vec{B})$  à l'ordre 1 en  $\frac{\omega r}{c}$  pour le condensateur d'une part et pour le solénoïde d'autre part.

**Q.19** Que peut-on dire, en ordre de grandeur, du rapport  $\left| \frac{E}{cB} \right|$  pour  $\frac{\omega r}{c} \ll 1$  dans le condensateur d'une part et dans le solénoïde d'autre part ?

- Q.20** Dans les deux cas, donner l'expression de la densité volumique instantanée d'énergie électromagnétique  $u_{em}(r, t)$  toujours dans le cadre de l'approximation  $\frac{\omega r}{c} \ll 1$ .
- Q.21** Quelle approximation est-il légitime de faire dans l'expression de  $u_{em}(r, t)$  suivant que l'on soit dans le cas du condensateur ou du solénoïde ? Quel système peut-on qualifier de système à dominante électrique ? magnétique ?
- Q.22** Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(r, t)$  dans le condensateur d'une part et dans le solénoïde d'autre part, toujours pour  $\frac{\omega r}{c} \ll 1$ .
- Q.23** Effectuer un bilan énergétique global sur la zone d'espace correspondant à l'intérieur du condensateur d'une part, du solénoïde d'autre part. Commenter.

#### IV – Premier contact avec l'ARQS

- Q.24** Dans l'hypothèse des régimes lentement variables énoncée et étudiée ci-dessus ( $\frac{\omega r}{c} \ll 1$ ), déduire de ce qui précède que l'équation de Maxwell-Faraday pour un système « à dominante électrique » s'écrit de manière approchée sous la forme :  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ . Que peut-on dire de l'équation de Maxwell-Ampère ?
- Q.25** De même, pour un système « à dominante magnétique », donner l'expression approchée des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère en régime lentement variable.
- Q.26** Peut-on définir sans ambiguïté « l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires » et formuler les équations de Maxwell de manière unique dans le cadre de cette approximation ?

Dans l'ARQS magnétique, on peut montrer que l'équation locale de conservation de la charge est la même qu'en statique :  $\text{div} \vec{j} \simeq 0$ . Dans ces conditions, on retrouve notamment la loi des nœuds et les lois usuelles de l'électrocinétique, qui relèvent donc de l'ARQS magnétique (la loi des nœuds n'existe pas dans l'ARQS électrique !). En pratique, sauf dans des systèmes « pathologiques » comme les condensateurs, l'ARQS se confond avec l'ARQS magnétique. La raison est simple : les conducteurs sont neutres, donc la densité volumique de charge est nulle en général, alors que des courants peuvent circuler. Par conséquent, c'est la limite magnétique de l'ARQS qui nous est familière et que l'on nomme souvent tout simplement ARQS.