

Exercices posés à l'oral des Mines en 2013 – énoncés relevés dans la RMS

Indications sur chaque exercice en fin de document

1. a. Établir la formule : $\forall m \geq 1 \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad \sum_{p=0}^q (-1)^p \binom{m}{p} = (-1)^q \binom{m-1}{q}.$
- b. Établir la formule : $\forall m \geq 2 \quad \forall q \geq 1 \quad \sum_{p=0}^q (-1)^p p \binom{m}{p} = (-1)^q m \binom{m-2}{q-1}.$
- c. Pour $m \geq 3$ et $q \geq 2$, donner une expression simplifiée de $\sum_{p=0}^q (-1)^p (p-1) \binom{m}{p}.$
- d. Pour $x \in \mathbb{R}$, $m \geq 3$ et $q \geq 2$, simplifier $\sum_{p=0}^q (-1)^p (x-p)^2 \binom{m}{p}.$
- e. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{p=0}^n (-1)^p (n-p)^2 \binom{2n}{p} = 0.$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{(2^n)} + 1$. Si a et b sont deux entiers naturels distincts, montrer que F_a et F_b sont premiers entre eux. En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.
3. Montrer que l'ensemble des nombres premiers congrus à -1 modulo 4 est infini.
4. Soit $(G, \cdot)$ un groupe, de neutre noté e . Soient H et K deux sous-groupes de G . On pose $HK = \{hk; (h,k) \in H \times K\}.$
 - a. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
 - b. On définit $f : (h,k) \in H \times K \mapsto hk \in G$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un morphisme de groupes. Dans ce cas montrer que f est injective si et seulement si $H \cap K = \{e\}.$
 - c. On dit que H est distingué lorsque $\forall x \in G \quad xHx^{-1} \subset H$. On suppose H et K distingués.
 - i. Montrer que HK est un sous-groupe distingué de G .
 - ii. Montrer que, si $H \cap K = \{e\}$ et $HK = G$, alors G est isomorphe à $H \times K$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k = \exp \frac{2ik\pi}{n}$. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \alpha_k}.$
6. Soit $P = X^3 - 3X + 1$.
 - a. Montrer que P admet trois racines réelles irrationnelles.
 - b. Montrer qu'aucune de ces racines n'est annulée par un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 2.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $1 + X + P^2$ soit divisible par $X^{n+1}.$
8. On pose $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. Montrer que
$$\sup\{|P(z)|; z \in U\} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$
9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré $n \geq 1$.
 - a. Donner la décomposition en éléments simples de la fraction $F = \frac{P}{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)}.$
 - b. En déduire que $\max\{|P(k)|; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \geq \frac{n!}{2^n}.$
10. Soient $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n-1))$. On considère l'application $\Delta : Q \in \mathbb{R}[X] \mapsto Q(X+1) - Q(X).$
 - a. Montrer que les images itérées de P par Δ appartiennent toutes à F .
 - b. Montrer que $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n-1))$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 - c. Montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad Q(X) = \sum_{k=1}^n a_k Q(X+k).$
11. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et f un endomorphisme nilpotent de E .

- a. Montrer que $f^n = 0$.
 - b. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\dim(\text{Ker } f^k) \geq k$.
 - c. Soit g un deuxième endomorphisme nilpotent vérifiant $f \circ g = g \circ f$, et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p + q \geq n$. Montrer que $f^p \circ g^q = 0$.
12. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ (groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$), soit f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
- a. Nature géométrique de f_σ si σ est une transposition ?
 - b. On pose $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f_\sigma$. Déterminer la nature géométrique de p , son noyau et son image.
13. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et G un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$, de cardinal n .
- a. Montrer que $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$ est un projecteur.
 - b. En déduire que $\dim\left(\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{Id}_E)\right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr } g$.
14. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et, pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, p_i un projecteur de E . On suppose que $p = p_1 + \dots + p_r$ est un projecteur.
- a. Montrer que l'image de p est la somme directe des images des p_i pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.
 - b. Si i et j sont deux éléments distincts de $\llbracket 1, r \rrbracket$, montrer que $p_j \circ p_i = 0$.
15. Soit $B_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver en fonction de $a \in \mathbb{R}$ tous les sous-espaces vectoriels stables par B_a .
16. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- a. Résoudre $X = \text{tr}(X)M + N$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - b. Résoudre $X + {}^t X = \text{tr}(X)M$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
17. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.
18. Soient $c, x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes. On définit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $a_{ij} = x_i$ si $i = j$, $a_{ij} = c$ si $i > j$ et $a_{ij} = 1$ si $i < j$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1.
- a. Déterminer le degré du polynôme $P = \det(A + XJ)$.
 - b. Calculer $\det A$; on commencera par le cas où $c \neq 1$.
19. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = A - J$. On pose $A^{-1} = (c_{ij})$. Montrer que $\det(B) = \det(A) \left(1 - \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{ij}\right)$.
20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A - I_n$ soit nilpotente. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
21. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. Établir l'équivalence des deux assertions suivantes :
- i. A est inversible ;
 - ii. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{rg}(AM) = \text{rg}(MA)$.
22. Soient A et B deux matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même trace.
23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite idempotente lorsque $P^2 = P$. Montrer que, si A est de rang $n - 1$ et est le produit de $n - 1$ matrices idempotentes, alors 1 est valeur propre de A .
24. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
- a. Montrer que AB et BA ont le même spectre.
 - b. On suppose que $1 \notin \text{Sp}(AB)$. Exprimer $I_n - AB)^{-1}$ en fonction de A, B , et $(I_n - BA)^{-1}$.

c. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $B = {}^tA$. Déterminer $(I_n - AB)^{-1}$ si cette matrice existe.

25. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que A est de rang pair.

26. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $A(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $A(a, b)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$; préciser ses éléments propres.

b. Représenter l'ensemble des couples (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tels que $A(a, b)^k \rightarrow 0$ quand k tend vers $+\infty$.

27. a. Étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, diagonaliser la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = a$ si $i = j$, et $a_{ij} = b$ sinon.

b. Étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, diagonaliser la matrice $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b_{ij} = a$ si $i + j = n + 1$, et $b_{ij} = b$ sinon.

28. Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant non nul, telle que l'ensemble $P = \{A^k; k \in \mathbb{N}\}$ soit fini. Montrer que $A^{12} = I_2$.

29. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'il existe P dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

30. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant aucune valeur propre commune. Montrer que la matrice nulle est l'unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AX = XB$.

En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut se décomposer sous la forme $AX - XB$ pour une certaine matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

31. Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Montrer que, si M est diagonalisable, alors A et B sont diagonalisables.

b. Montrer que la réciproque est vraie si et seulement si il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = UB - AU$.

32. Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe λ et μ dans $\mathbb{C}^*$ tels que $\text{Im} M \subset \text{Ker}(M - \lambda I_n)$ et $\text{Im} N \subset \text{Ker}(N - \mu I_n)$. Montrer que M est semblable à N si et seulement si $\text{tr} M = \text{tr} N$ et $\text{rg} M = \text{rg} N$.

33. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

a. On suppose $A - A^{-1}$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $A + A^{-1}$ peut être diagonalisable sur $\mathbb{R}$ sans que A le soit.

34. Soit u un endomorphisme de rang r de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u possède un polynôme annulateur de degré $r + 1$.

35. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

36. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr}(A^k) \rightarrow 0$ quand k tend vers $+\infty$. Montrer que chaque valeur propre de A a un module strictement inférieur à 1.

37. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $p_1, \dots, p_q \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ non nuls, $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ dans $\mathbb{C}^*$ deux à deux distincts tels que, pour tout $k \in \llbracket 1, q + 1 \rrbracket$, $f^k = \sum_{j=1}^q \lambda_j^k p_j$.

a. Montrer que f est diagonalisable.

b. Montrer que les p_j sont dans $\mathbb{C}[f]$ (i.e. sont des polynômes en f).

c. Que peut-on dire des p_j ?

38. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit salaire défini par $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ pour tout $(P, Q) \in E^2$. On donne $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $F = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$. On note Q le projeté orthogonal de 1 sur F ; on pose $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$ et $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k (X + 1) \cdots (X + k)$.

a. Déterminer $(Q - 1|X^k)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et montrer que $P(k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

b. Justifier l'existence de $I = \inf \left\{ \int_0^{+\infty} (1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n)^2 e^{-t} dt; (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$ et le calculer.

39. Soit E un espace euclidien.

- a. Déterminer les endomorphismes de E qui commutent avec tout projecteur orthogonal.
- b. Déterminer les endomorphismes de E dont la matrice dans toute base orthonormée est diagonale.
40. Soit s une symétrie vectorielle d'un espace euclidien E de dimension n . Soit P le polynôme tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \det(\text{Id}_E + s^* \circ s)$.
- a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.
- b. Montrer que $P(1) \geq 2^n$.
41. Soit $M = (m_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left| \sum_{i,j} m_{ij} \right| \leq n$.
42. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
43. Soient A et B dans $O_n(\mathbb{R})$ telles que $(A + 2B)/3$ appartienne à $O_n(\mathbb{R})$. Que dire de A et B ?
44. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (symétrique définie positive). Pour x et y dans $\mathbb{R}^n$, on pose $(x|y)_A = (A^{-1}x|y)$.
- a. Montrer que $(x, y) \mapsto (x|y)_A$ est un produit scalaire.
- b. Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_{\min}(M)$ la plus petite valeur propre de M et $\lambda_{\max}(M)$ la plus grande.
- c. Soit $f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{(Bx|x)}{(A^{-1}x|x)}$. Montrer que $f(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset [\lambda_{\min}(AB), \lambda_{\max}(AB)]$.
- d. On suppose ici que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \leq \lambda_{\min}(AB) \leq \lambda_{\max}(AB) \leq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$.
45. Soient E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
- a. Soit N une norme sur E . Montrer que H est fermé ou dense dans (E, N) .
- b. Donner un exemple pour chacun des deux cas.
46. On pose $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Sur cet espace, on définit les normes N_1 et N_2 par $N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
- a. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ? Les normes N_1 et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
- b. Les espaces (E, N_1) et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ sont-ils complets ?
47. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $S(A) = \{P^{-1}AP; P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est borné.
48. a. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général u_n diverge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que la série de terme général u_n/σ_n^2 converge.
- b. Soit (a_n) une suite réelle telle que, pour toute suite réelle (x_n) de carré sommable, la série $\sum a_n x_n$ converge. Montrer que $\sum a_n^2$ converge.
49. On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on note $\varphi(f)$ l'unique primitive F de f telle que $\int_0^1 F(t) dt = 0$. Montrer que φ est un endomorphisme continu de E , et que sa norme subordonnée vaut $1/2$.
50. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n^2 \left(\prod_{k=1}^n k^k \right)^{-4/n^2}$.
51. Pour tout $n \geq 2$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^n (X - k)$, et l'on note x_n la plus grande racine réelle de P'_n .
Montrer que $x_n \sim n$, puis déterminer un équivalent de $x_n - n$.
52. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^a u_n}$.
- a. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si $a > 1$.
- b. On suppose $a > 1$ et on note ℓ la limite de (u_n) . Déterminer un équivalent de $\ell - u_n$.
- c. On suppose $a < 1$. Déterminer un équivalent de $u_{n+1}^2 - u_n^2$, puis un équivalent de u_n .
53. Prouver la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. On pose $v_n = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k}$, montrer la convergence de la série de terme général v_n , puis donner un équivalent de v_n .

54. Montrer l'existence de $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(4k^2 - 1)}$.
55. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}$.
- Étudier la convergence de (u_n) .
 - Donner un équivalent de u_n .
56. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^{u_n-1} \frac{1}{k} \leq n < \sum_{k=1}^{u_n} \frac{1}{k}$.
- Montrer que u_n existe et est unique. Calculer u_1 et u_2 .
 - Étudier la convergence de la série de terme général $1/u_n$.
57. Soient f et g continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.
- Si $f > g$, montrer l'existence de $a > 0$ tel que $f^n(x) \geq g^n(x) + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$. ($f^n = f \circ \dots \circ f$).
 - Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.
58. Soient $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{n-1} F(1/x)$. Montrer que $F^{(n)}(1/x) = (-1)^n x^{n+1} G_n^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
59. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique subdivision $(x_{0,n}, \dots, x_{k,n}, \dots, x_{n,n})$ de $[a, b]$ telle que
- $$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t) dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t) dt$$
- Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k,n})$.
60. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\int_{-1/2}^{3/2} f(3t^2 - 2t^3) dt = 2 \int_0^1 f(3t^2 - 2t^3) dt$.
61. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Calculer $\int_0^\pi \frac{dt}{1 + \lambda^2 \sin^2 t}$.
- Nature, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$.
62. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} e^{-t} (t-1)^n dt = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ (partie entière de $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$).
63. a. Existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-x} - e^{-2x} - 1}{x^2} dx$.
- On pose $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1 - e^{-t}}{t^2} dt$. Déterminer le domaine de définition de F . Donner la limite de $F(x)$ en 0, en $+\infty$. Donner un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$.
 - Calculer I .
64. a. Montrer que $\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
- Soit f continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle admet une primitive 2π -périodique si et seulement si $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.
 - Soit f continue, 2π -périodique, et telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. Montrer que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est semi-convergente, et que $\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
65. Soit $g : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

- a. Déterminer le domaine de définition D de g . Montrer que g est de classe C^∞ sur D .
- b. Montrer que $x \mapsto xg(x) - g(x+1)$ est constante.
- c. Dessiner le graphe de g sur $]0, +\infty[$. Déterminer des équivalents de g en 0 et en $+\infty$.
66. On fixe $a > 0$ et l'on pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{n^2 x^2}\right)$.
- a. Déterminer le domaine de définition de f .
- b. Étudier la continuité, puis la dérivabilité de f .
- c. Déterminer la limite, puis un équivalent, de f aux bornes de son domaine de définition.
67. Pour $n \geq 2$, soit $f_n : x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.
- a. Montrer que $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.
- b. Montrer que $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
- c. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle dérivable en 0 ?
- d. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x) = o(x^{-k})$ quand x tend vers $+\infty$.
68. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto x^n f(x)$.
- a. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
- b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la série de terme général f_n converge uniformément sur $[0, 1]$.
69. a. Domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.
- b. Limite de f en $+\infty$.
- c. Limite et équivalent de f en 0.
- d. Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
- e. Équivalent de f en $+\infty$.
70. Soient a et b deux réels de $]0, 2\pi[$.
- a. Montrer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{k} = i \int_a^b \frac{e^{it} dt}{1 - e^{it}}$.
- b. En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ika}}{k}$.
71. Soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. Calculer $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$.
72. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n^2}$. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
73. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t dt$.
- a. Déterminer la limite de (a_n) , puis un équivalent.
- b. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Quel est le domaine de définition de f ? Étudier sa continuité.
- c. Calculer $f(x)$.
74. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner un équivalent quand x tend vers 1^- de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.
75. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\text{th } t}{t^2} dt$.
- a. Trouver un équivalent de a_n . En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

- b. On pose $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que S est continue sur $[-R, R[$. Trouver un équivalent de S en R^- .
76. Soit I_n le cardinal de l'ensemble des involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire des permutations σ telles que $\sigma^2 = \text{Id}$.
- a. Montrer que $\forall n \geq 3 \quad I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
- b. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.
- c. Exprimer la somme de cette série entière à l'aide des fonctions usuelles et écrire I_n sous forme d'une somme.
77. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière à coefficients réels de rayon de convergence infini.
- a. Établir la formule $\int_{-1}^1 f(t)^2 dt = -\frac{1}{i} \int_0^\pi f(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta$.
- b. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} a_k \right) \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$.
78. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)^{n+1}} f(t) dt$.
- a. Étudier la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$, et en déduire la limite de $(a_n)^{1/n}$.
- b. Montrer que la suite de terme général a_{n+1}/a_n est croissante, et déterminer sa limite.
79. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, dominée par x^p en $+\infty$, et admettant un équivalent de la forme Cx^q en 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.
- a. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b. Calculer I_n pour $f : x \mapsto x^q$.
- c. Donner un équivalent de I_n dans le cas général.
80. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/n^2}}{f(x) + (1/n^2)} dx$.
- a. Montrer que la suite (a_n) est bien définie.
- b. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que (a_n) converge.
81. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$.
- a. Montrer que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
- b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $a_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
82. a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x/t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$.
- b. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1} dt$.
83. a. Donner le développement en série de Fourier de $g : x \mapsto \exp(e^{ix})$.
- b. Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{2\cos t} dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}$.
84. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^\pi f(t) dt = 0$. Montrer que $\forall x \in [0, \pi] \quad |f(x)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{3} \int_0^\pi f'(t)^2 dt}$.
85. On note E l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour f dans E , on définit $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} f(x+t)e^{-t} dt$.
- a. Montrer que, pour tout $f \in E$, la fonction $\Phi(f)$ est dans E , de classe C^1 , et est solution de l'équation différentielle $y' - y = -f$.
- b. Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de $\Phi(f)$ en fonction de ceux de f .

- c. On fixe $f \in E$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(\Phi^n(f))$.
86. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ et $I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} D_n(x) dx$.
- a. Soit $a > 0$; trouver la limite de $I_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- b. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + k^2}$, puis de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
87. Montrer que l'équation différentielle $y'' - y = \frac{1}{1+t^2}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, qui soit bornée sur $\mathbb{R}$. Cette fonction a-t-elle une limite en $+\infty$?
88. On considère l'équation différentielle $y' = \frac{1}{\ln y}$.
- a. Exprimer les solutions à l'aide de la réciproque d'une fonction, réciproque que l'on ne cherchera pas à expliciter.
- b. Étudier les solutions, en représenter les graphes.
89. Extremums de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - (x - y)^2$.
90. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$. Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y) \in D \mapsto xy(x^2 + y^2 - 1)$.
91. On pose $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$, et $f : (x, y) \in U \mapsto (x - y, xy)$. Montrer que f définit un C^1 -difféomorphisme de U sur $V = f(U)$. Déterminer V et le représenter.
92. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $(tx, ty) \in D$ pour tout $(x, y) \in D$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α si $\forall (x, y) \in D \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.
- a. Montrer que, si f est homogène de degré α et de classe C^1 , alors $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$.
- b. Soit $\omega = M dx + N dy$ une forme différentielle exacte de classe C^1 sur D , où M et N sont homogènes de degré $\alpha \neq -1$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{\alpha + 1} (xM(x, y) + yN(x, y))$ est une primitive de ω sur D .
- c. Trouver une primitive de $\omega : (x, y) \mapsto \frac{y^2}{(x - y)^2} dx - \frac{x^2}{(x - y)^2} dy$.

Indications

1. a. Utiliser $\binom{m-1}{p-1} + \binom{m-1}{p} = \binom{m-1}{p}$. b. Utiliser a. et $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. c. Même chose. d. Développer $(x - p)^2$, et utiliser $p^2 = p(p - 1) + p$.
2. Si p est un nombre premier qui divise F_a et F_b , alors il est impair et divise leur somme et leur différence.
3. Avec $p_1, \dots, p_n$ premiers congrus à -1 modulo 4, construire un nombre q , congru à -1 modulo 4, et qui n'est divisible par aucun des p_i .
4. a. Il faut $(hk)^{-1} \in HK$. b. Si c'est un morphisme, alors $\text{Im } f$ est un sous-groupe. Pour l'injectivité, étudier le noyau. c.i. Ne pas oublier de vérifier que c'est un sous-groupe, et utiliser a.
5. Chercher un polynôme simple ayant les facteurs du produit pour racines.
6. a. Chercher les racines rationnelles sous forme irréductible a/b , et revenir à une équation entre entiers pour obtenir une contradiction. b. Examiner le pgcd D de P et d'un annulateur de degré 2, et le polynôme P/D ; on notera que ce pgcd est dans $\mathbb{Q}[X]$.
7. Chercher plutôt le polynôme iP , et penser au DL de $\sqrt{1+x}$.
8. Si $P = 1 + \sum a_k X^k$, on a $\sum a_k = -1$, qui permet de minorer $\sum a_k^2$ par Cauchy-Schwartz. En appliquant Bessel-Parseval à $\theta \mapsto P(e^{i\theta})$, on majore $\sum a_k^2$ en fonction du sup de l'énoncé.
9. b. Examiner la limite de XF en $+\infty$.
10. a. Classiquement, $\deg \Delta(Q) = \deg Q - 1$ pour Q non constant; les itérés sont donc nuls à partir du rang n . b. Les polynômes donnés engendrent le même espace que les $\Delta^k(P)$, qui sont échelonnés en degré donc indépendants. c. La relation $\Delta^n(P) = 0$ donne un n -uplet vérifiant $P(X) - \sum a_k P(X + k) = 0$; en examinant les fonction polynômes

associées en un nombre suffisant de points, on en déduit que les autres polynômes de la base du $\mathbf{b}$ vérifient la même relation.

11. a. Montrer que $\chi_f = (-1)^n X^n$. **b.** S'il existe k tel que $\dim(\text{Ker } f^k) < k$, alors (noyaux croissants) il existe $j < k$ tel que $\text{Ker } f^j = \text{Ker } f^{j+1}$. C'est un exo classique de montrer alors que $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^j$ pour tout $p \geq j$, ce qui mène à une contradiction avec $f^n = 0$. **c.** L'espace $\text{Im } g^q$ est stable par f qui est nilpotent, il suffit de montrer $\text{rg } g^q \leq p$.

12. b. Comme son nom l'indique... On a immédiatement $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma \circ \tau}$; en déduire $f_\sigma \circ p = p$ puis $p^2 = p$. Pour l'image, calculer $p(e_i)$: montrer qu'il y a exactement $(n-1)!$ permutations vérifiant $\sigma(i) = j$. Pour le noyau, le plus simple semble être de noter que $p^* = p$ pour le produit scalaire canonique.

13. a. Comme à l'exercice précédent, montrer $g \circ p = p$ pour $g \in G$, puis $p^2 = p$. **b.** Puisque p est un projecteur, $\text{tr } p = \text{rg } p$.

14. a. Pour un projecteur, le rang est égal à la trace. **b.** A i fixé, on a donc pour tout x : $p(p_i(x)) = p_i(x)$. Remplacer p par sa définition et utiliser le fait que la somme est directe.

15. $\chi_B = (1-X)(1+X)^2$, en général non diagonalisable. Pour les plans stables, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit doit diviser χ_B : donc $P \subset \text{Ker}(I_3 + B)^2$ ou $P \subset \text{Ker}(I_3 + B)(I_3 - B)$

16. a. Passer aux traces dans l'équation, distinguer le cas $\text{tr } M = 1$: dans ce cas, X est de la forme $\lambda M + N$. **b.** Étudier successivement les cas M non symétrique, M symétrique et $\text{tr } M \neq 2$, M symétrique et $\text{tr } M = 2$; dans ce cas, décomposer X en symétrique + antisymétrique.

17. La matrice $U_1 = {}^t \text{com}(A)$ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et vérifie $AU_1 = (\det A)I_n$.

18. a. Soustraire une ligne à toutes les autres : $\deg P \leq 1$. **b.** Pour $c \neq 1$, les valeurs en $-c$ et -1 déterminent P . Pour $c = 1$, utiliser un argument de continuité.

19. Écrire $B = A(I_n - A^{-1}J)$. La matrice $A^{-1}J$ a des coefficients simples, le déterminant de $I_n - A^{-1}J$ se calcule facilement.

20. Poser $A = I_n + N$ et utiliser le développement limité à l'ordre n de $\sqrt{1+x}$.

21. Pour ii. $\implies$ i., supposer A non inversible et construire M telle que $AM = 0$ et $MA \neq 0$.

22. Discuter suivant que $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$ ou non. Dans le premier cas, $\text{tr } A = 0$ et A est semblable à la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf $m_{1,2}$ qui vaut 1. Dans le second cas, $\text{tr } A \neq 0$ et A est semblable à $\text{diag}(\text{tr } A, 0, \dots, 0)$.

23. Les facteurs P_k sont de rang au moins $n-1$, examiner l'intersection de leurs images.

24. a. Exercice classique : commencer par le cas A inversible, puis utiliser la densité de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. **b.** Partir de $(I_n - AB)^{-1} = \sum (AB)^k$, même si ce n'est pas forcément vrai : vérifier que la formule obtenue marche dans tous les cas.

25. La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ses valeurs propres non nulles sont complexes conjuguées.

26. a. Valeurs propres $a^2 - b^2$ d'ordre 2, $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$. Deviner des vecteurs propres avec des coordonnées égales à ± 1 ou 0. **b.** On veut $|\lambda| < 1$ pour toute valeur propre λ .

27. a. On a $A = (a-b)I_n + bJ$ où les coefficients de J valent tous 1 ; J se diagonalise facilement. **b.** Ici, $B = (a-b)S + bJ$ et S se diagonalise facilement ; trouver une base de vecteurs propres communs à J et S .

28. Puisque P est fini, il existe $r > 0$ tel que $A^r = I_2$; étudier les valeurs propres de A , en notant que $\text{tr } A \in \mathbb{Z}$.

29. Construire une base de $\text{Ker } A$ qui trigonalise l'endomorphisme induit par B sur $\text{Ker } A$, montrer qu'on peut la compléter en une base de trigonalisation pour A , et que cette base convient aussi pour B .

30. Montrer que, si $AX = XB$, alors $P(A)X = XP(B)$ pour tout polynôme P .

31. a. Prendre un polynôme annulateur scindé à racines simples de M . **b.** Si $C = UB - AU$, $P(M)$ s'exprime simplement en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et U pour tout polynôme P . Si M est diagonalisable, prendre une base de colonnes propres sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, en choisir n telles que $Q = (Y_1 \cdots Y_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit inversible ; en écrivant

$M \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \end{pmatrix}$, on trouve U en fonction de Q , $P = (X_1 \cdots X_n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

32. On a $M^2 - \lambda M = 0$, donc M est diagonalisable.

33. a. Sur chaque sous-espace propre de $A - A^{-1}$, l'endomorphisme induit par A vérifie $u^2 - \lambda u - \text{Id} = 0$. **b.** Prendre une rotation de $\mathbb{R}^2$.

34. Dans une bonne base, la matrice de u est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Utiliser χ_A .

- 35.** Pour le sens indirect, montrer que $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)^k$ et utiliser le lemme des noyaux.
- 36.** Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, choisir un polynôme L tel que $L(\lambda) = 1$ et $L(\mu) = 0$ pour toutes les autres valeurs propres, et étudier $\text{tr}(A^n L(A))$ quand n tend vers $+\infty$.
- 37. a.** Le polynôme $X \prod (X - \lambda_j)$ annule f . **b.** Construire ces polynômes à partir des polynômes d'interpolation associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. **c.** Les projections associées aux sous-espaces propres de f vérifient aussi les relations du **b** ; attention à la valeur propre 0, qui est masquée dans les relations de l'énoncé.
- 38. a.** Par définition de Q , $(Q - 1|X^k) = 0$ pour tout k , ce qui donne $P(k) = 0$. **b.** Il s'agit de calculer $\|Q - 1\|^2$. Les conditions $(Q - 1|X^k) = 0$ montrent que ce nombre vaut $-(Q - 1|1)$, qui s'exprime simplement à l'aide de P . D'autre part, les conditions sur P permettent de donner une expression simple de P .
- 39. a.** Si u commute avec la projection orthogonale sur la droite D , alors D est stable par u . **b.** Tout projecteur orthogonal a une base orthonormale de diagonalisation.
- 40. a.** Utiliser $s^2 = (s^*)^2 = \text{Id}_E$. **b.** $s^* \circ s$ est diagonalisable, donc $P(1) = \prod (1 + \lambda_i)$. En utilisant $s^2 = 1$, on a aussi $P(1) = \det(\text{Id}_E + s \circ s^*)$ et $s \circ s^* = (s^* \circ s)^{-1}$, donc $P(1)^2 = \prod (1 + \lambda_i)(1 + 1/\lambda_i)$.
- 41.** Interpréter la somme comme un produit scalaire.
- 42.** Il faut montrer que $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est une matrice non nulle, construire $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que, pour le produit scalaire usuel, $(A|\Omega) \neq 0$.
- 43.** $A = B$: écrire $\|(a(x) + 2b(x))/3\|^2 = \|x\|^2$ et utiliser Cauchy-Schwartz.
- 44. b.** $x \mapsto ABx$ est autoadjoint pour $(\cdot|\cdot)_A$. **c.** $f(x) = (ABx|x)_A/(x|x)_A$. **d.** Encadrer $f(x)$ à l'aide des valeurs propres de A et B , en notant que les bornes du **c** sont atteintes.
- 45. a.** Comme son nom l'indique, H est un hyperplan. S'il existe $f_0 \notin H$ limite d'une suite d'éléments de H , utiliser $E = H \oplus \text{Vect}(f_0)$ pour montrer que H est dense. **b.** Fermé pour $\|\cdot\|_\infty$, dense pour $\|\cdot\|_1$.
- 46. a.** On a $|f(0)| \leq \|f\|_\infty \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Comparer N_1 et $\|\cdot\|_\infty$ en utilisant les fonctions $x \mapsto x^n$. **b.** Pour $\|\cdot\|_\infty$, utiliser une suite de polynômes convergeant uniformément vers $x \mapsto |x - 1/2|$ par exemple. Pour N_1 , remplacer par N_2 ; si (f_n) est une suite de Cauchy, (f_n) et (f'_n) convergent uniformément.
- 47.** Utiliser des P de la forme $\text{diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1)$ pour montrer que A est diagonale, puis que tous les $P^{-1}AP$ le sont.
- 48. a.** Écrire $\frac{u_n}{\sigma_n^2} = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{\sigma_n^2}$ et comparer à $\int_{\sigma_{n-1}}^{\sigma_n} \frac{dt}{t^2}$. **b.** Si $\sum a_n^2$ diverge et $S_n = \sum_{k=0}^n a_k^2$, utiliser le **a** et l'hypothèse pour montrer que $\sum \frac{a_n^2}{S_n}$ converge, et comparer à une intégrale, en notant que $S_{n-1} \sim S_n$.
- 49.** Montrer que $F(x) = \int_0^x t f(t) dt - \int_x^1 (1-t) f(t) dt$.
- 50.** Passer au logarithme et faire apparaître la somme de Riemann $\frac{1}{n} \sum \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n}$. Plus amusant : faire une transformation d'Abel dans la somme $\sum k \ln k$, en posant $k = S_k - S_{k-1}$, puis utiliser de la sommation d'équivalents.
- 51.** On a $n-1 < x_n < n$. Pour l'équivalent de $x_n - n$, utiliser $\frac{P'}{P} = \sum \frac{1}{X-k}$.
- 52. a.** Utiliser (u_n) converge $\iff \sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ; suivant le sens étudié, minorer u_n par u_1 ou le majorer par sa limite. **b.** Utiliser $\ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k)$.
- 53.** La suite (v_n) est alternée ; montrer qu'elle vérifie les hypothèses du TSSA en prouvant que $v_n + v_{n+1}$ est du signe de v_n . Pour l'équivalent, grouper les termes de v_n par deux pour l'écrire comme reste d'une série à termes positifs, multiplié par $(-1)^n$.
- 54.** Décomposer $1/k(4k^2 - 1)$ en éléments simples, exprimer les sommes partielles de la série à l'aide de H_n et H_{2n} , avec $H_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$.
- 55. b.** Classiquement, chercher α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle, puis utiliser la sommation des équivalences. On peut aussi remarquer que $u_{n+1} - u_n \sim u_n^2 \sim u_n u_{n+1}$ donc $(1/u_{n+1}) - (1/u_n) \sim \dots$
- 56. b.** Encadrer $H_p = \sum_{k=1}^p (1/k)$ à l'aide d'intégrales pour encadrer u_n .
- 57. a.** Prendre $a = \inf(f - g)$. **b.** Sinon $f > g$ ou $g > f$, le **a** montre que les fonctions ne sont pas bornées.
- 58.** Récurrence sur n , en utilisant $G_{n+1}(x) = xG_n(x)$ et la formule de Leibniz pour les dérivées successives.
- 59.** Introduire $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ et sa réciproque ; la somme du **b** se relie à une somme de Riemann pour $f \circ F^{-1}$.
- 60.** Dans la première intégrale, poser $t = 1/2 + \sin t$; on obtient $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\sin 3t) \cos t dt$, les parties "en trop" correspondant aux intégrales sur $[-\pi/2, -\pi/6]$ et $[\pi/6, \pi/2]$. Par des changements dans ces deux morceaux du type

$\pi - x$ ou $x \pm 2\pi/3$, qui ne modifient pas le $\sin(3t)$, on se ramène à l'intégrale sur $[-\pi/6, \pi/6]$ (= intégrale d'origine sur $[0, 1]$), avec des termes en plus qui s'éliminent entre les deux morceaux.

61. b. Découper l'intégrale en somme d'intégrales sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, et se ramener à l'intégrale du **a** par translation de la variable.

62. Le nombre $n!/e$ est l'intégrale sur $[1, +\infty[$. Il s'agit donc de montrer que l'intégrale totale est dans $\mathbb{Z}$, et que l'intégrale sur $[0, 1]$ est strictement plus petite que $1/2$ en valeur absolue.

63. b. En 0, $e^{-t} = 1 - t + t^2 a(t)$ avec a bornée au voisinage de 0. En $+\infty$, $1 - e^{-x} \leq 1 - e^{-t} \leq 1$ sur $[x, 2x]$. **c.** Décomposer $F(x)$ en $\int_x^{+\infty} - \int_{2x}^{+\infty}$, puis $t = 2u$ dans la deuxième intégrale.

64. a. C'est les reste de la série $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}$; utiliser le TSSA pour la majoration du reste. **b.** On a $F(x + 2\pi) - F(x) = \text{cste}$. **c.** Effectuer une intégration par parties.

65. b. Écrire $\frac{x}{x+n} = 1 - \frac{n}{x+n}$. **c.** En 0 : $g(x) = 1/x + \sum_{n \geq 1} \dots$, la dernière somme a une limite finie; ou

exploiter la relation du **b** en justifiant la continuité en 1. En $+\infty$, $\left| \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ par exemple.

66. c. En $+\infty$: majorer $|\ln(1+u) - u|$ par du Ku^2 sur un voisinage de 0 à préciser. En 0, utiliser la comparaison à une intégrale.

67. b. Prouver $R_n(x) \leq \frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln n(1-e^{-1})}$ et étudier les variations du numérateur. **c.** En 0, on peut par exemple

écrire $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{\ln n} \sum_{k=2}^n e^{-kx} \geq \frac{(n-1)e^{-nx}}{\ln n} \geq \frac{(n-1)e^{-1}}{\ln n}$ sur $]0, 1/n]$. **d.** Prouver que $\sum x^k f_n(x)$ converge uniformément sur un $[a, +\infty[$.

68. a. Pour ε donné, prendre α tel que $|f(x)| < \varepsilon$ sur $[1-\alpha, 1]$, puis n_0 tel que $(1-\alpha)^{n_0} < \varepsilon$. **b.** Si convergence uniforme, l'interversion somme/limite donne $f'(1) = 0$.

69. c. Pour l'équivalent, comparer à l'intégrale. **e.** L'équivalent est le premier terme e^{-x} ; multiplier par e^x et prouver la convergence uniforme sur un $[a, +\infty[$ pour intervertir limite et somme.

70. a. Il s'agit de montrer que $\sum_{k=1}^n \int_a^b e^{ikt} dt$ a pour limite $\int_a^b \frac{e^{it}}{1-e^{it}} dt$; mettre la différence sous la forme $\int_a^b g(t) e^{int} dt$,

où g est de classe C^1 sur $[a, b]$, et faire une intégration par parties. **b.** Prendre $b = \pi$.

71. Pour justifier l'interversion somme/intégrale, majorer le reste $\sum_{k \geq n+1} \sin^k t$ à l'aide du TSSA. Pour calculer l'intégrale, poser $u = \tan(t/2)$.

72. Avec $b_n = 1/a_n$, on a $b_{n+1} = b_n + (n/b_n) \geq 2\sqrt{n}$ (étude des variations). On en déduit $b_{n+1} \leq b_n + c_n$ avec $c_n = n/\sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$, d'où $b_n \leq b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sim Kn\sqrt{n}$. Cela donne $R = 1$. En -1 , convergence par TSSA. En 1 ?

73. a. Pour l'équivalent, poser $u = \tan t$, puis intégrer par parties en primitivant le u^n . **b.** Pour la continuité en -1 , majorer le reste par le TSSA pour prouver la convergence uniforme sur $[-1, 0]$. **c.** Prouver $f(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1-x\tan t}$; poser $u = \tan t$.

74. Écrire $(1-x)f(x)$ comme somme d'une série entière, prouver que celle-ci a une limite finie (qui se calcule) en 1^- .

75. a. Pour l'équivalent, intégrer par parties en primitivant le $1/t^2$. **b.** Pour la continuité en -1 , majorer le reste par le TSSA pour prouver la convergence uniforme sur $[-1, 0]$. Pour l'équivalent, puisque $a_n \sim 1/n$, le candidat naturel est $\sum (x^n/n) = -\ln(1-x)$. Majorer $a_n - 1/n$ pour montrer que $S(x) + \ln(1-x)$ a une limite finie en 1^- .

76. a. Distinguer les involutions σ telles que $\sigma(n) = n$ des autres. **b.** La définition donne immédiatement $I_n \leq n!$. **c.** En prenant $I_0 = 1$, on obtient $S'(x) = (x+1)S(x)$ puis $S(x) = e^{x^2/2} e^x$; utiliser le produit de Cauchy, il y a des problèmes de parité.

77. a. La fonction f^2 est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, qui converge donc normalement sur le disque unité. Il suffit donc de prouver $\int_{-1}^1 t^n dt = -\frac{1}{i} \int_0^\pi e^{in\theta} e^{i\theta} d\theta$ pour tout n . **b.** Le premier membre est $\int_{-1}^1 f(t)^2 dt$, en tenant compte du fait que les termes impairs ont une intégrale nulle. Le second membre vient de Bessel-Parseval appliqué à $f(e^{i\theta})$, notez que $f(e^{-i\theta})$ est le conjugué de $f(e^{i\theta})$ puisque les a_n sont réels.

78. a. Avec $g(t) = \frac{t}{1+t^2}$, majorer l'intégrale par un $K/2^n$, et minorer en utilisant $g(t) \geq 1/2 - \varepsilon$ sur un intervalle $[1-\alpha, 1+\alpha]$. En passant aux puissances $1/n$, majorant et minorant peuvent être rendus aussi proches qu'on veut de $1/2$. **b.** Pour la croissance, on veut $a_n^2 \leq a_{n-1}a_{n+1}$; majorer a_n^2 par Cauchy-Schwartz. Pour la limite, appliquer Cesaro à $\ln(a_{n+1}/a_n)$ pour montrer qu'elle est égale à la limite du **a**.

79. b. Poser $nt = u^2$, calculer $\int_0^{+\infty} u^{2q} e^{-u^2} du$ par récurrence sur q , à l'aide d'une intégration par parties. **c.** Poser $t = u/n$ et appliquer le théorème de convergence dominée à $n^{q+1/2} I_n$. Pour dominer, on peut par exemple distinguer deux cas : si $p \leq q$, majorer $|f(x)|$ sur $\mathbb{R}_+$ par un Kx^q ; si $p \geq q$, majorer $|f(x)|$ sur un $[A, +\infty[$ par un $K_1 x^p$, puis sur $[0, A]$ par un $K_2 x^q$, et enfin sur $\mathbb{R}_+$ par la somme des deux.

80. b. Si $1/f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on applique le théorème de convergence dominée. Si (a_n) converge, la limite majore (a_n) , donc majore les intégrales de $1/f$ sur les segments.

81. a. Pour la décroissance, utiliser la monotonie de $u \mapsto u/(1+u)$. **b.** Pour le premier terme, intégrer par parties en primitivant $t^{n-1}/(1+t^n)$. Poser ensuite $u = t^n$; calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$ à l'aide du développement en série entière de $\ln(1+u)$.

82. a. Montrer que les dérivées sont les mêmes. Attention aux problèmes en 0 et 1. **b.** Comme d'habitude, prendre des suites (x_n) de limite $+\infty$ et appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir la limite en $+\infty$ de la première intégrale du **a**.

83. a. Écrire $g(x) = \sum e^{inx}/n!$ et justifier grâce à la convergence uniforme qu'il s'agit bien du développement en série de Fourier de g . **b.** C'est Bessel-Parseval.

84. Prendre g paire 2π -périodique égale à f sur $[0, \pi]$. On a $|f(x)| \leq \sum |a_k| = \sum \frac{1}{k} |ka_k| \leq \sqrt{\sum \frac{1}{k^2} \sum k^2 a_k^2}$ par Cauchy-Schwartz. Le dernier terme est le majorant demandé. Bien justifier toutes les convergences.

85. a. Pour la classe C^1 et l'équation différentielle, poser $u = x + t$. **b.** Immédiat avec l'équation différentielle. **c.** Vérifier que l'on peut passer à la limite dans la série de Fourier de $\Phi^n(f)$.

86. a. Décomposer $I_n(a)$ en somme d'intégrales sur des intervalles de longueur 2π , qu'on ramène à $[0, 2\pi]$ par translation de la variable. La limite est la somme des coefficients de Fourier a_k de la fonction 2π -périodique telle que $x \mapsto \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-2\pi a}}$ sur $[0, 2\pi[$, donc la valeur en 0 de la somme de sa série de Fourier. **b.** $a/(a^2 + k^2) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx$; montrer que $\sum 1/k^2$ est la limite en 0 de la somme précédente divisée par a .

87. La solution cherchée est $x \mapsto -\frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{1+t^2} dt$ obtenue en appliquant la méthode de variation des constantes. La limite en $+\infty$ est 0 : la première intégrale se majore simplement, découper la deuxième en $\int_{-\infty}^A + \int_A^x$ et majorer chaque terme par $\varepsilon/2$.

88. Il y a en fait deux réciproques, celles des restrictions de $u \mapsto u \ln u - u$ à $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$; chacune correspond à un type différent de solutions, qui prend ses valeurs dans l'intervalle considéré.

89. Pas d'extremum en $(0, 0)$: examiner $f(x, x)$ et $f(x, -x)$. Justifier que les deux autres points critiques sont des minimums globaux.

90. Il y a 9 (!) points critiques intérieurs à D ; seuls ceux pour lesquels $x = \pm 1/2$ sont des extremums locaux. Ne pas oublier les extremums sur le bord : ce doivent être des extremums pour $t \mapsto f(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$; noter qu'il s'agit d'extremums globaux.

91. On trouve $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + 4v > 0\}$.

92. a. Dériver $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ par rapport à t , puis prendre $t = 1$. **b.** Dériver la fonction donnée, en tenant compte du **a** et du fait que ω est fermée. **c.** Ne pas oublier de vérifier que la forme est exacte.