1. (TPE) Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a \equiv b\ [n] \Longrightarrow a^2 \equiv b^2\ [n^2]$.

2. (Mines Alès) Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ où m_{ij} vaut $a+b$ si $i = j$, ab si $i = j-1$, 1 si $i = j+1$, et 0 dans tous les autres cas. Calculer $\det M$.

3. (CCP) Soient $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble de cardinal n et $\{\Omega_1, \dots, \Omega_p\}$ une famille de p parties de E, deux à deux distinctes. On suppose qu'il existe $a \in N^*$ tel que, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $i \neq j$, on ait $\mathrm{Card}(\Omega_i \cap \Omega_j) = a$. On pose $d_i = \mathrm{Card}(\Omega_i)$.

Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité $p \leqslant n$.

a. Donner une inégalité vérifiée par d_i et a.

b. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$ où m_{ij} vaut 1 si $a_j \in \Omega_i$, 0 sinon. On pose $U = M{}^tM \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Vérifier que les coefficients diagonaux de U sont $d_1, \dots, d_p$ et que les autres coefficients sont tous égaux à a.

c. Montrer qu'il existe au plus un $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $d_i = a$.

d. Déterminer le rang de U et conclure.

4. (Mines Alès) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto (\mathrm{tr}A)M + (\mathrm{tr}M)A$.

a. Donner le noyau et l'image de ϕ.

b. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

5. (TPE) On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A,B) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$. Déterminer la distance d'une matrice M au sous-espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

6. (TPE) On considère $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(X|Y) = \mathrm{tr}({}^tXY)$. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto A\,{}^tXA$. Déterminer Φ^*.

7. (Mines Alès) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Nature de la série de terme général $u_n = \sin\Big(\dfrac{\pi(n^2+an+b)}{n}\Big)$.

8. (Isup) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ pour que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^\alpha - 1|^\beta}$ existe.

9. (Mines Alès) Étudier la limite de $\quad \displaystyle\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \quad$ quand α tend vers 0^+.

10. (Mines Alès) Soit (a_n) une suite réelle décroissante de limite nulle. On suppose que la série de terme général a_n est divergente. Déterminer le rayon de $\sum a_n x^n$.

11. Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n\,dt}{(1+t^2)^n}$. Montrer que la suite $(|I_n|)$ décroît vers 0. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} I_n$ converge et calculer sa somme.

12. (CCP) Pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose $G(x,y) = \displaystyle\int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)}\,dt$.

a. Montrer que G est bien définie et que, à $x > 0$ fixé, $G(x,y)$ admet une limite finie positive notée $G(x)$ quand y tend vers $+\infty$.

b. Montrer que, pour tout $n > 0$, $G(n,y) = \dfrac{1}{n}\Big(\displaystyle\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,dt - \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,dt\Big)$.

c. On pose $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n) - H(n-1) - \dfrac{1}{2n}$ est convergente, et en déduire un équivalent de $G(n)$.

13. (TPE) Soit le système différentiel (S) : $\quad \begin{cases} x'' = x' + y' - x \\ y'' = x' + y' - y \end{cases}$.

Écrire (S) sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1. Le résoudre.