1. (TPE) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-X$.

2. (CCP) Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

a. Montrer que $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)$.

b. Exprimer $\operatorname{rg}(u \circ v)$ en fonction de $\operatorname{rg}(v)$ et de la dimension de $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(v)$.

3. (CCP) Soient $k \in \mathbb{R}$ et $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (kx+y+z, x+ky+z, x+y+kz) \in \mathbb{R}^3$.

a. Calculer le polynôme caractéristique de f.

b. Déterminer le rang de f suivant k.

c. Déterminer les sous-espaces propres de f^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. (CCP) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. On suppose f^2 diagonalisable ; on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f^2.

a. On suppose $\det f \neq 0$. Trouver un polynôme annulateur de f, et montrer que f est diagonalisable.

b. On suppose $\det f = 0$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrer que f est encore diagonalisable.

5. (CCP) Soient E un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, $u \in E \setminus \{0_E\}$, U la colone des coordonnées de u dans $\mathscr{B}$ et $F = \mathbb{R}u$.

a. Soit p la projection orthogonale sur F. Montrer que, pour tout $x \in E$, $p(x) = \dfrac{(x|u)}{\|u\|^2}\, u$.

b. En déduire que la matrice de p dans $\mathscr{B}$ est $\dfrac{1}{{}^tUU}\, U{}^tU$. On pose $A = U{}^tU$.

c. Montrer que A est diagonalisable, déterminer ses éléments propres.

d. Montrer que $I_n - \frac{1}{{}^tUU}\, U{}^tU$ est la matrice d'une projection orthogonale sur un espace vectoriel que l'on précisera.

6. (TPE) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (matrice symétrique positive de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

a. Montrer qu'il existe $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

b. Soit $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$.

7. (Mines Alès) Soit (u_n) une suite réelle positive ; pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} \leqslant (1+1/n)S_n$. Montrer que la série de terme général u_n converge.

8. (Mines Alès) Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x(1+x^2)\operatorname{Arctan} x}\, dx$.

9. (CCP) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \int_1^x (\ln t)^{n/2}\, dt$; soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

a. Justifier l'existence de u_n sur $[1,+\infty[$. Montrer que $\quad \forall x \geqslant 1 \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant (x-1)(\ln x)^{n/2}$. En déduire que, pour tout $x \in [1,e[$, la série $\sum u_n(x)$ converge.

b. Montrer que, pour tout $x > e$, la série $\sum u_n(x)$ diverge.

c. Cas $x = e$. Opérer le changement de variable $t = e^u$. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(e)$? Quel est le domaine de définition de f ?

d. Soit $x \in [1,e[$. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[1,x]$. En déduire que, pour tout $x \in [1,e[$, $\quad f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1+\sqrt{\ln t}}{1-\ln t}\, dt$.

e. On pose $\varphi(t) = \dfrac{1+\sqrt{\ln t}}{1-\ln t}$. Montrer que $\varphi(t) \sim \dfrac{2e}{e-t}$ quand t tend vers e. En déduire que φ n'est pas intégrable sur $[1,e[$. Étudier la limite de f en e^-.

10. (Télécom Sud Paris) Donner le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.

11. (CCP) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(x+1)^n}\, dx$ et $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{(x+1)^n}$.

a. Montrer que la suite (J_n) est bien définie et qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

b. Calculer f_n' et trouver une relation entre J_n et J_{n+1}. Trouver un équivalent de J_n quand n tend vers $+\infty$.

c. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum J_n x^n$.

12. (CCP) Pour $x \in [0,\pi]$, on pose $f(x) = x(\pi - x)$.

a. Déterminer une suite (a_n) telle que $\quad \forall x \in [0,\pi] \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$.

b. En déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 1}(1/n^2)$ et de $\sum_{n\geqslant 1}(1/n^4)$.

13. (TPE) Étudier les extremums de $(x,y) \longmapsto x\big(\ln^2 x + y^2\big)$.