1. (TPE) Soit $G = \mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} = \{a + \pi b; (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

a. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

b. Soit $d = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que, si $d > 0$, alors $d \in G$; en déduire une contradiction.
Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $\{\sin n; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans [-1,1].

2. (CCP) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f, vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.
Que devient le résultat si E est de dimension infinie ?

3. (Ensea) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AXA$.

a. Pour $A = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec r coefficients égaux à 1, étudier le rang de f.

b. Étudier le rang de f dans le cas général.

4. (Télécom Sud Paris) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -2A$. Montrer que le rang de A est pair.

5. (CCP) Soient E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a. Montrer que $(F + G)^\circ = F^\circ \cap G^\circ$.

b. Montrer que $(FnG)^\circ = F^\circ + G^\circ$.

6. (Mines Alès) Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

7. (Mines Alès)

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n vérifiant ${u_n}^3 + nu_n = 1$.

b. Étudier la convergence de la suite (u_n).

c. Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n.

8. (TPE) Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes.

9. (CCP) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit $f_n : x \in [0, \pi/2] \longmapsto n \sin x \cos^n x$.

a. Représenter f_n. Étudier les suites (x_n) et (y_n), où y_n est le maximum de f_n et x_n le point en lequel il est atteint.

b. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

c. Étudier la convergence de la suite de terme général $\int_0^{\pi/2} f_n(x)\, dx$.

10. (Ensea) Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) x^n$?

11. (TPE) Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles, $A : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et $B : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$. On suppose que $a_n > 0$ pour tout n, que A a un rayon de convergence infini et que la suite (b_n/a_n) a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que B a un rayon de convergence infini.

b. Montrer que $B(t)/A(t)$ a pour limite ℓ en $+\infty$.

12. (TPE) Soit $\Phi : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, dt$.

a. Domaine de définition ? Limites aux bornes ?

b. Donner un équivalent en $+\infty$.

13. (Télécom Sud Paris) Soit (E) l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = \frac{1}{x+1}$.

a. Trouver une solution polynômiale et une solution de la forme $x \longmapsto x^\alpha$ pour l'équation homogène associée sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

14. (TPE) Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \cos\theta + \cos(\theta/2)$. Calculer le rayon de courbure en $\theta = 0$.