1. (Mines Alès)

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = 1$.

b. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

2. (Télécom Sud Paris) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

a. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est stable par f.

b. Soit g l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$; montrer que $\operatorname{tr} g = \operatorname{tr} f$.

3. (Isup) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$ et $L : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (b-X)(X-a)P' + nXP$.

a. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Décrire les éléments propres de L. L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

4. (CCP) Soient a, b dans $\mathbb{C}$ et f, u, v dans $\mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie. On suppose que $f = au + bv$, $f^2 = a^2u + b^2v$ et $f^3 = a^3u + b^3v$.

a. Montrer que f est diagonalisable.

b. On suppose a et b distincts et non nuls. Montrer que u et v sont simultanément diagonalisables (c'est-à-dire diagonalisables dans une même base).

5. (TPE) Soit E un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ soit orthogonale.

6. (CCP) Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, s une symétrie vectorielle de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $u = s^* \circ s$.

a. Montrer que $\displaystyle\det(u + \mathrm{Id}_E) = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right)$.

b. Montrer que $\displaystyle\det\left(\frac{u + \mathrm{Id}_E}{2}\right) \geqslant 1$. Étudier le cas d'égalité.

7. (TPE) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1, n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$.

8. (TPE)

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{a+t^2}\,dt$ pour $a > 0$.

9. (Mines Alès) Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Étudier la dérivabilité de f en 0. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

10. (TPE) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Étudier le rayon de convergence de la série entière $\sum s_n x^n$, et calculer sa somme.

11. (Télécom Sud Paris) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^n + x^{-n}}}$ pour n entier naturel.

a. Étudier l'existence de I_n.

b. Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

12. (CCP) Soit f 2π-périodique, telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0, 2p[$. La série de Fourier de f converge-t-elle ? Que vaut sa somme ? Calculer cette série de Fourier et en déduire $\sum_{n\geqslant 1}(1/n^2)$.

13. (TPE) Résoudre $\begin{cases} x' = 5x - 3y - 4z \\ y' = -x + y - 2z \\ z' = x - 3y \end{cases}$.