1. (CCP) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Pour $P\in\mathbb{R}_2[X]$, soit $\varphi(P) : x\in\mathbb{R}\longmapsto \int_0^{+\infty}(ax^2+bxt+ct^2)P(t)e^{-t}\,dt$.

a. Montrer que φ est bien défini, et définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme ?

2. (TPE) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

3. (Ensea) Soit $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à f.

a. Soit $V=(a,b,c)$. Montrer que, si V est un vecteur propre de ${}^tA$, alors le plan d'équation $ax+by+cz=0$ est stable par f.

b. Étudier la réciproque.

c. Rechercher les plans stables par $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$.

4. (Ensea) Soit $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant 1. On suppose qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^p=I_2$.

a. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

b. On suppose $A\neq I_2$ et $A\neq -I_2$. On note α et β les valeurs propres de A. Montrer que α et β sont de module 1, conjugués, et que $|\mathscr{R}e(\alpha)|\in\{0,1/2,1\}$.

c. Calculer A^{12}.

5. (TPE) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $X{}^tXX=I_n$ d'inconnue $X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6. (TPE) Soit E un espace euclidien et K l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E.

a. Soit p un projecteur de E. Montrer que $p\in K$ si et seulement si $\quad\forall x\in E\quad \|p(x)\|\leqslant\|x\|$.

b. Montrer que K est une partie compacte de E.

7. (CCP) Après avoir justifié sa convergence, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n}{2^n}$.

8. (CCP)

a. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty}te^{-nt}\,dt$.

b. Existence et calcul de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,dt$.

9. (CCP) Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^2x^n$?

10. (Ensai) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de $x\longmapsto\ln(1-x+x^2)$ et $x\longmapsto \operatorname{Arctan}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

11. (CCP) Soit $h : x\in\mathbb{R}\longmapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp\Big(-t^2+\frac{x^2}{t^2}\Big)$.

a. Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $t\longmapsto\dfrac{a^2}{t^2}\exp\Big(-t^2+\dfrac{b^2}{t^2}\Big)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b. Montrer que h est dérivable sur R_+^*.

c. Montrer que $h'=-2h$. Expliciter h sur $\mathbb{R}$ en fonction de $h(0)$.

12. (CCP) Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n : x\in\mathbb{R}\longmapsto\dfrac{\sin^4(nx)}{n!}$.

a. La série $\sum f_n$ converge-t-elle ? Soit $F=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$.

b. La fonction F est-elle somme de sa série de Fourier ?

c. Calculer les coefficients de Fourier de F et la somme de la série de Fourier de F.

13. (CCP) Tracer la courbe d'équation polaire $\rho=\tan\theta$.