1. (CCP) Calculer le pgcd de 473 et 220.
Trouver les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $473x+220y=k$ pour $k=1$, $k=11$ et $k=22$.

2. (CCP)

a. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une relation entre $\det(A)$ et $\det(-A)$.

b. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Étudier la parité du polynôme caractéristique de B. En déduire que, si n est impair, alors $\det B = 0$.

3. (Ensea) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p tel que $u = p\circ u - u\circ p$.

4. (Mines Alès) Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, de trace nulle, de rang 2 et telle que $A^3 \neq 0$. Étudier la diagonalisabilité de A.

5. (CCP) Soient E un espace euclidien, $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. On pose $s = e_1+\cdots+e_n$.

a. Montrer qu'il existe un unique couple (α,β) de réels positifs tels que les $u_i = \alpha e_i + \beta s$ soient normés et vérifient $\|u_i - u_j\| = 1$ pour $i \neq j$.

b. Calculer $(u_i \,|\, u_j)$. En déduire que $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E.

c. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ définie par $f(u_i) = u_{i+1}$ si $i \in [\![1,n-1]\!]$, et $f(u_n) = u_1$. Montrer que f est orthogonale. Caractériser f lorsque $n=3$.

6. (CCP) Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques (i.e. vérifiant $f^* = -f$) de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique.

a. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

b. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que $f \in \mathscr{A}$ si et seulement s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = u\wedge x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

c. Soient f l'endomorphisme antisymétrique associé à u et p_u le projecteur orthogonal sur la droite engendrée par u. Déterminer l'endomorphisme $\phi = p_u + f$.

7. (CCP) Étudier la convergence et la convergence absolue des séries

$$\sum(-1)^n \sin\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \quad \text{et} \quad \sum(-1)^n \Big[\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) - \tan\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big]$$

8. (Télécom Sud Paris) Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$?

9. (Ensea) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n).

10. Étude de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$: rayon de convergence, continuité et dérivabilité de la somme (en particulier, aux bornes de l'intervalle de convergence).

11. (TPE)

a. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$. Quelle est la limite de $\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt$?

b. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t)|\sin(nt)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt.$

12. (TPE) Soit $I : a \longmapsto \displaystyle\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,\frac{dx}{1-x}$. Déterminer l'ensemble de définition de I. Étudier la limite de $I(a)$ quand a tend vers 1^-.

13. (TPE) Soient $a>0$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(E) : y'' - ay = f$ possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

14. (CCP) Étudier et tracer la courbe définie par $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln|\sin t| \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$.