

Spéciales MP* – 18/19 – Préparation à l'oral

Sauf mention contraire, les énoncés qui suivent ont été posés à l'oral CCP MP en 2018.

Algèbre générale

1.
 - a. Rappeler la définition de l'argument d'un nombre complexe.
 - b. Résoudre, pour n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 1$.
 - c. En déduire les solutions de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$. Montrer que ces solutions sont réelles.
2. On veut démontrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est aussi.
 - a. Énoncer le théorème de Rolle.
 - b. Si a est racine de P d'ordre k , que dire de a pour P' ?
 - c. Démontrer le résultat.
3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[-1, 1]$ par : $\forall x \in [-1, 1] \quad f_n(x) = \cos(n \arccos x)$.
 - a. Calculer f_0 , f_1 et f_2 .
 - b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation liant $f_{n+1} + f_{n-1}$ et f_n .
 - c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que $T_n(x) = f_n(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
 - d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les points de $[-1, 1]$ en lesquels T_n vaut ± 1 .
 - e. Montrer que les racines de T_n sont toutes dans $] -1, 1[$.
4. (IMT MP) Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ le système $x + y = \overline{4}$, $xy = \overline{10}$.

Algèbre linéaire élémentaire

5. (CCP PSI) Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \longmapsto P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.
 - a. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer $\deg \varphi(P)$ en fonction de $\deg P$. Déterminer le noyau de φ .
 - b. L'application φ est-elle surjective?
6. Soit $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \longmapsto P(X + 1) + P(X)$.
 - a. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
 - b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $E_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $E_k(X + 1) + E_k(X) = X^k$; vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad E'_k = kE_{k-1}$.
 - c. Soit n un entier naturel non nul et $P \in \mathbb{R}[X]$; prouver l'égalité
$$f^n(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P(X + k).$$
7. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.
 - a. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad f^2 = \lambda f$.
 - b. A-t-on nécessairement $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$?
 - c. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - i. Il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que cf est une projection.
 - ii. $f \circ f \neq 0$.
 - iii. $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$.
 - d. Montrer que les assertions précédentes entraînent que f est diagonalisable, et que $\text{tr } f \neq 0$.
8. Soit E un espace vectoriel; soient p et q deux projecteurs de E .
 - a. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
 - b. Dans ce cas, montrer que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ et que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$.

9. On note $S_n(\mathbb{R})$ (respectivement $A_n(\mathbb{R})$) l'espace des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que ${}^tA \neq A$; soit F l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $X + {}^tX = \text{tr}(X)A$.
- Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
 - Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $A_n(\mathbb{R}) \subset F$.
 - On suppose $\text{tr}(A) \neq 2$; montrer que $F = A_n(\mathbb{R})$.
 - On suppose $\text{tr}(A) = 2$; déterminer F .
10. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.
- Calculer $\det A(-1)$.
 - Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = \det(A(a) + xU)$. Montrer que P est polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
 - Calculer $P(-a)$ et $P(1)$. En déduire $\det A(a)$ pour $a \neq -1$.
 - Comparer les résultats des questions a et c; commenter.
11. Soient $a_1, \dots, a_n$ n nombres complexes deux à deux distincts. On pose $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Q_k = P/(X - a_k)$.

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ Q_1(x) & Q_2(x) & \dots & Q_n(x) \end{vmatrix}$.

Réduction des endomorphismes

12. (IMT MP) Soit $n \geq 2$; soit $E = \mathbb{C}_n[X]$. Soit $\varphi : P \in E \mapsto (X^2 + X)P(1) + (X^2 - X)P(-1)$.
- Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$; déterminer son image et son noyau.
 - Déterminer les éléments propres de φ ; est-il diagonalisable?
13. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.
- Déterminer les valeurs propres de A par chacune des trois méthodes suivantes :
 - en revenant à la définition de vecteurs propres et valeurs propres;
 - en calculant le polynôme caractéristique;
 - en déterminant le polynôme minimal.
 - La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$? trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
 - Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, et donner une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
14. Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à b , et tous les autres coefficients sont égaux à 1.
- Exprimer K en fonction de la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 et de I_n .
 - En déduire un polynôme annulateur de K de degré 2.
 - Trouver les valeurs propres de K , et les dimensions des sous-espaces propres associés.
 - Déterminer $\det K$.

15. On note M^T la transposée de M .

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des colonnes non nulles. On pose $A = XY^T$.

- a. i. Donner la taille de A et préciser ses coefficients. Montrer que A est de rang 1 et en déduire la dimension de $\text{Ker } A$.
- ii. Donner une expression matricielle de $\text{tr } A$.
- b. Réciproquement, montrer que toute matrice de rang 1 peut s'écrire sous la forme XY^T .
- c. Déterminer $\text{Sp } A$.
- d. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } A \neq 0$.

16. a. Soient p un projecteur d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(\text{Id}_E + \lambda p)$ en fonction de λ et de $\text{rg } p$.

b. Soit V une colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $M = V^t V$. Déterminer le rang de M . Montrer que M est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés.

c. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de la matrice $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b_{ii} = 1 + a_i^2$ pour tout i , et $b_{ij} = a_i a_j$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$.

17. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension au moins égale à 2 et ℓ une forme linéaire non nulle sur E . Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$.

- a. Déterminer $\dim(\text{Ker } \ell)$.
- b. Soit ℓ' une forme linéaire sur E telle que $\text{Ker } \ell \subset \text{Ker } \ell'$; montrer que ℓ et ℓ' sont proportionnelles.
- c. Soit $f : x \in E \mapsto \ell(a)x - \ell(x)a$. Montrer que f est un endomorphisme de E .
- d. On suppose que $\ell(a) \neq 0$.
 - i. Déterminer $\text{Ker } f$.
 - ii. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

18. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer le polynôme caractéristique de M , puis son polynôme minimal.
- b. Démontrer qu'il existe deux matrices réelles A et B vérifiant $M = A + B$, $A^2 = A$, $B^2 = 3B$, et $AB = BA = 0$; on pourra procéder par analyse-synthèse.
- c. Déterminer les rangs de A et B .
- d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer M^n comme combinaison linéaire de A et B .

19. (CCP PSI) Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$ et $\text{tr } M = 0$.

20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a. Montrer que A diagonalisable $\implies A^2$ diagonalisable.
- b. Montrer que la réciproque est fautive à l'aide de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- c. Donner une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir un polynôme annulateur pour que A soit diagonalisable.
- d. On suppose que A et A^2 sont diagonalisables. Montrer que $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$.
- e. On suppose que A^2 possède n valeurs propres distinctes. Montrer que A est diagonalisable.
- f. On suppose A^2 diagonalisable et A inversible. Montrer qu'alors A est diagonalisable.

21. Soit $n \geq 1$; soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer que A admet au moins un vecteur propre ; soit α la valeur propre associée.
 - On suppose ici que $AB = BA$.
 - Montrer que $\text{Ker}(A - \alpha I_n)$ est stable par B .
 - Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
 - On suppose ici qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}^*$ tel que $AB - BA = \beta A$. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\Phi(M) = MB - BM$ pour toute matrice M .
 - Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \Phi(A^k) = k\beta A^k$.
 - En déduire que A est nilpotente, et que $\text{Ker } A \neq \{0\}$.
 - Montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.
22. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = B$.
- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^k A = kB^k$.
 - En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $AP(B) - P(B)A = BP'(B)$.
 - Soit Q le polynôme caractéristique de B ; montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k Q^{(k)}(B) = 0$. En déduire que B est nilpotente.
23. Soit $b \in \mathbb{R}$. Soient $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, sauf ceux de la diagonale principale, qui valent tous b .
- Ces deux matrices sont-elles diagonalisables ?
 - Diagonaliser H .
 - Calculer $\det A$.
24. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note E_x l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M + xI_n = 0$.
- Soit $M \in E_x$, où $x \neq 0$. Montrer que M est inversible, et donner une expression de son inverse. Quels sont les éléments inversibles de E_0 ?
 - Trouver α réel tel que, si $x < \alpha$, alors $M \in E_x$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - On prend ici $x = -2$. Déterminer l'ensemble T des traces des éléments de E_x . Quel est son cardinal ?
25. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
 - Donner les critères de diagonalisabilité faisant intervenir des polynômes.
 - Montrer que si B est diagonalisable, alors A est diagonalisable, puis que $A = 0$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.
26. (CCP PSI) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E ; on suppose que f admet un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$.
- On suppose E de dimension finie ; montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
 - Montrer que le résultat reste vrai si E n'est pas de dimension finie.
27. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
- On suppose que F et G sont des sous-espaces de E stables par u et que $E = F \oplus G$. On note v (respectivement w) l'endomorphisme induit par u sur F (respectivement G). Si f est un endomorphisme, π_f désigne son polynôme minimal.
 - Justifier que χ_v et χ_w divisent χ_u . Justifier que π_v et π_w divisent π_u .
 - Montrer que $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_v, \pi_w)$.
 - Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u) \in \text{GL}(E) \iff P \wedge \pi_u = 1$.
28. (IMT MP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
- la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle ;
 - la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, et la suite $(\text{tr } A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ a pour limite 0.

Espaces euclidiens

29. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure canonique d'espace euclidien. Trouver la matrice de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$.
30. Soit E un espace euclidien. Pour tout sous-espace F de E , on note p_F le projecteur orthogonal sur F .
- Soit F un sous-espace de E .
 - Montrer que $F = \{x \in E \mid \|p_F(x)\| = \|x\|\}$.
 - Montrer que $\forall x \in E \quad \|p_F(x)\| \leq \|x\|$.
 - Montrer que $\forall (x, y) \in E^2 \quad (p_F(x)|y) = (x|p_F(y))$. Que cela signifie-t-il pour p_F ?
 - Soient maintenant F , G et H des sous-espaces vectoriels de E tel que $p_F \circ p_G = p_H$.
 - Montrer que $F \cap G = H$.
 - Montrer que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.
31. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, combien y a-t-il de matrices orthogonales à coefficients entiers?
32. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal. On pose $v = u - I_E$.
- Montrer que $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont supplémentaires orthogonaux.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$.
 - Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $(y, z) \in \text{Ker } v \times \text{Im } v$ tel que $f_n(x) = y + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z)$ pour tout $n \geq 1$.
 - En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\text{Ker } v$.
33. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.
- Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, s'exprimant en fonction des valeurs propres de u , tel que :

$$\forall x \in E \quad \alpha \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \beta \|x\|^2 \quad (*)$$
 - Soit $x \in E$, tel que $x \neq 0_E$. On suppose que l'une des inégalités de $(*)$ est une égalité. Montrer que x est vecteur propre de u .
 - On considère $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , et $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ la suite des valeurs propres de u , ordonnée de façon croissante.
On suppose que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \langle u(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u(e_i) = \lambda_i e_i$.
34. Soit E un espace euclidien. Soit f un endomorphisme antisymétrique de E , c'est-à-dire un endomorphisme vérifiant $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.
- Que dire de f^2 ? Montrer que, pour tout $x \in E$, $\langle f^2(x), x \rangle \leq 0$ et $\langle f(x), x \rangle = 0$.
 - Que dire de la matrice A de f dans une base orthonormée?
 - Calculer $\det({}^t A)$ de deux manières différentes. En déduire que, si f est inversible, alors la dimension de E est paire.
 - Montrer que les valeurs propres de f^2 sont réelles et négatives.
35. Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E \quad \langle u(x), x \rangle = 0$.
- Montrer que $\forall (y, z) \in E^2 \quad \langle u(y), z \rangle = -\langle y, u(z) \rangle$.
 - Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires orthogonaux.
 - L'espace $\text{Im } u$ contient-il des vecteurs propres? Que peut-on dire du degré d'un polynôme de $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de racines réelles? En déduire que $\text{rg } u$ est pair.
36. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$. Pour toute fonction $f \in E$, on note $v(f)$ la fonction $x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x f(t) dt$.
- Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$, et que

$$\exists ! w \in \mathcal{L}(E) \quad \forall (f, g) \in E^2 \quad (v(f)|g) = (f|w(g))$$
 - Soit $f \in E$. Montrer que $[w(f)]' = -f$ et calculer $[v(f)]'$.
 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Résoudre $y'' + \lambda y = 0$.
 - Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $w \circ v$.

Analyse élémentaire

37. (IMT MP) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle admet une limite en $+\infty$, une limite en $-\infty$, et que ces deux limites sont égales.

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

38. (CCP PSI)

a. Montrer que $g : x \mapsto x + \ln(1+x)$ réalise une bijection de $] -1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.

b. Montrer que la réciproque h de cette bijection est de classe C^∞ sur J , et donner son DL₃ en 0.

Espaces vectoriels normés

39. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| ; t \in [0, 1]\}$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$ où $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ pour tout $(f, g) \in E^2$. On admet qu'il s'agit de trois normes sur E .

a. Montrer qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall f \in E \quad \|f\|_2 \leq \alpha \|f\|_\infty$ et $\|f\|_1 \leq \beta \|f\|_2$.

b. Ces trois normes sont-elles équivalentes ?

c. Soit $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0, 1] \quad f(x) \geq 0\}$; F est-il fermé pour $\|\cdot\|_\infty$? pour $\|\cdot\|_1$? pour $\|\cdot\|_2$?

40. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in E$, on pose

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \quad \text{et} \quad \rho(A) = \max\{|\lambda| ; \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

a. Montrer que N est une norme telle que $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour $A, B \in E$. La fonction ρ est-elle une norme sur E ?

b. Montrer que $\rho(A) \leq N(A)$ pour tout $A \in E$.

c. On suppose que $\rho(A) < 1$. Prouver que $\sum_{k \geq 0} A^k$ converge et déterminer sa somme.

Suites et séries numériques

41. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle croissante, qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geq \frac{v_n + u_n}{2}$.

c. En déduire que la suite (v_n) converge vers ℓ .

42. (CCP PSI) On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par la donnée de $u_1 > 0$ et la relation $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + nu_n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

a. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$; on pourra étudier la fonction $f_n : x \mapsto \frac{x}{1 + nx^2}$.

c. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$; on pourra introduire $\sum_{k=1}^{n-1} ku_k$, en notant que $ku_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}$.

43. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite décroissante de réels, telle que la série $\sum u_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.

a. Montrer que $\sum v_n$ converge.

b. En déduire que $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

44. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = h_n - \ln n$.
- Montrer que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge; en déduire que (u_n) converge vers une limite finie notée γ . Justifier le développement $h_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -h_{2n} + h_n$.
 - Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.
 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la suite (w_n) par $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} w_k = 1/k & \text{si } k \text{ n'est pas multiple de } 4; \\ w_k = \alpha/k & \text{si } k \text{ est multiple de } 4. \end{cases}$
Étudier la convergence de $\sum w_n$ en fonction de la valeur de α .
45. (IMT MP) Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^b}{\prod_{k=1}^n (1 + a^k)}$.
46. a. Démontrer à l'aide d'un DL₂ que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.
- Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2N} = \ln \left[\frac{(2N)!(2N+1)!}{2^{4N}(N!)^4} \right]$.
 - Sachant que $N! \sim N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$, déterminer la limite de S_{2N} .
 - Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
47. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (3k-2)$ et $v_n = \frac{1}{n^{3/4}}$.
- Montrer que, pour n assez grand, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$; on pourra utiliser un développement asymptotique.
 - En utilisant la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
 - En considérant la série de terme général $w_n = \frac{2}{3} \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{2/3}}$.
48. a. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 . Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$.
- Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{\pi}^{\theta} \sum_{k=1}^n e^{ikt} dt$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = i \ln \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) + \frac{\pi - \theta}{2}$.
 - Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.
 - Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge, et calculer sa somme.

Intégration

49. a. Étudier la convergence des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/2}} dt$.
- b. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$.
- c. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} (e^{\sin t/\sqrt{t}} - 1) dt$.
50. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^4}$.
- a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$; étudier sa parité, et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; étudier ses variations.
- c. Donner un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers $+\infty$.
51. Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$ et ayant pour limite ℓ en $-\infty$. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$; pour $u \in \mathbb{R}$, on pose $I(u) = \int_u^{+\infty} [f(a+x) - f(b+x)] dx$.
- a. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $I(u)$ est bien définie et vaut $\int_{a+u}^{b+u} f(t) dt$.
- b. On prend ici $f : x \mapsto \ell$ si $x < 1$, $\frac{2\ell}{1+x^2}$ si $x \geq 1$. Calculer $\lim_{u \rightarrow -\infty} I(u)$.
- c. On revient au cas général. Calculer $\lim_{u \rightarrow -\infty} I(u)$ si l'on suppose $\ell = 0$; en déduire $\lim_{u \rightarrow -\infty} I(u)$ dans le cas ℓ quelconque.
- d. Soient a' et b' deux réels tels que $0 < a' < b'$. Trouver α et β tels que $\frac{X}{(1+a'X)(1+b'X)} = \frac{\alpha}{1+a'X} + \frac{\beta}{1+b'X}$, puis simplifier l'expression $\frac{e^x}{(1+a'e^x)(1+b'e^x)}$.
- e. Déduire des questions précédentes $\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^{+\infty} \frac{e^x}{(1+a'e^x)(1+b'e^x)} dx$.
52. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f : x \in]0, 1[\mapsto \frac{|\ln(x)|^\beta}{(1-x)^\alpha}$.
- a. i. Trouver un équivalent en 0 et en 1 de f .
- ii. Déterminer les valeurs de (α, β) telles que f se prolonge par continuité à $[0, 1]$.
- iii. Déterminer les valeurs de (α, β) telles que f soit intégrable sur $]0, 1[$.
- b. Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} dx$. Montrer que I existe, puis calculer I .
53. a. Soient $M > 0$ et f une fonction de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ vérifiant : pour tout t dans $[1, +\infty[$, $|f(t)| \leq M$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f'(t)}{t} dt$ converge.
- b. En déduire que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$ sont convergentes.
- c. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(t^3) dt$ converge.

Intégrales dépendant d'un paramètre

54. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue et π -périodique, vérifiant $\int_0^\pi f(t) dt = 0$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^\pi f(t)e^{-t/n} dt$ et $v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t/n} dt$.
- a. Justifier que u_n et v_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b. Montrer qu'il existe une suite (a_n) , que l'on précisera, telle que $v_n = a_n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- c. Montrer que $a_n \sim \frac{n}{\pi}$ quand n tend vers $+\infty$.
- d. Montrer que (u_n) tend vers 0. Montrer que (v_n) converge, et préciser sa limite.

55. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} dt$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de I_n .
 - Déterminer la limite de la suite (I_n) à l'aide d'encadrements simples.
 - Donner un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.
56. Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
- Déterminer le domaine de définition D de Γ .
 - Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .
 - Montrer que $\forall x > 1 \quad \forall \lambda \in]0, 1[\quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - \lambda e^{-t}} dt = \Gamma(x) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n+1)^x}$
57. On définit la fonction g par $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.
- Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis déterminer une équation différentielle vérifiée par g .
 - En déduire une nouvelle expression intégrale de g , puis déterminer un équivalent de g en $+\infty$.
58. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt} dt$. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 - A l'aide d'une équation différentielle vérifiée par f , déterminer son expression.

Suites et séries de fonctions

59. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant $a < b$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, telle que la suite de fonctions associée converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f .
En utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange, montrer que f est une fonction polynôme de degré au plus n , et que la convergence est uniforme sur $[a, b]$.
60. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x(1 + e^{-nx})$.
- Déterminer la limite simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
 - La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?
 - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + e^{-nx}) dx$.
61. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)}{\ln(n+1)}$.
- Étudier la convergence de la série $\sum 1/(n \ln n)$.
 - Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$. Converge-t-elle normalement sur $[0, 1]$?
 - Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
62. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $U_n(x) = e^{-x \ln n}$.
- Déterminer les éventuels domaines de convergence simple, uniforme et normale de la série $\sum_{n \geq 1} U_n$.
 - Soit $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. La fonction ζ est-elle continue? Quelle est sa limite en $+\infty$?
 - La fonction ζ est-elle convexe?
 - Prouver que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ quand x tend vers 1^+ .
 - Tracer le graphe de ζ .

63. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$, $U_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n u_n(x)$, $v_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$, et $V_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n v_n(x)$.

Notons $u : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} u_n(x)$ et $v : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} v_n(x)$.

- Donner le domaine de définition I de u . Montrer que u est continue sur I .
- Donner le domaine de définition J de v . Montrer que v est continue sur J .
- Trouver une relation entre u et v .
- Trouver un équivalent en 1 de $d(x) = 2^{1-x} - 1$.
- Sachant que $v(1) = -\ln 2$, trouver un équivalent de $u(x)$ au voisinage de 1^+ .

64. Pour $x \in]0, +\infty[$, on définit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

- Montrer que S est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et donner le sens de variation de S .
- Montrer que $\forall x > 0 \quad S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x}$.
- Déterminer un équivalent de S en 0^+ .
- Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

65. Soit $S : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

- Déterminer le domaine de définition de S et étudier sa continuité.
- Trouver la limite de S en $+\infty$.
- Déterminer un équivalent de S en 0^+ .

66. Soit $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs, de limite $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$ et $g_n(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x}$.

- Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$.
- Étudier sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ de la série $\sum_{n \geq 0} g_n$.

d. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(t) dt$ converge, et que $\int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$.

67. On considère $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

- Étudier la convergence simple de la série. On note S sa somme.
- A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$? Convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
- La fonction S est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$? Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
- Soit $a > 0$. Résoudre : $(E) : y' - y = -\frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $[a, +\infty[$.
- Montrer que S est solution de (E) . En déduire une expression de S .

68. (IMT MP) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$.

Séries entières

- 69.** Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = \sum_{k=1}^n k^\beta$ et $b_n = 1/r_n$.
Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n t^n$; étudier sa convergence pour $t = R$ et $t = -R$.
- 70.** Donner le développement en série entière des fonctions suivantes en 0. On précisera dans chaque cas le rayon de convergence.
- $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}$.
 - $g : x \mapsto \ln \left(\frac{2+x}{1-x} \right)$.
 - $h : x \mapsto \int_0^x \sin(t^2) dt$
- 71. a.** Montrer que $t \mapsto \operatorname{Arctan} t$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
- b.** On considère la série entière $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)(2k-1)}$. Donner son rayon de convergence R . Que peut-on dire de la convergence sur $[-R, R]$? On note $f(x)$ la somme.
- c.** Donner une expression simple de f' et de f .
- d.** Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.
- 72. (CCP PSI)** Soit $f : t \mapsto \sqrt{1-t^2} \operatorname{Arcsin} t$.
- Sans chercher à le calculer, montrer que f admet un développement en série entière sur $] -1, 1[$.
 - Déterminer trois fonctions polynômes simples a , b et c telles que f soit solution de l'équation différentielle $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur $] -1, 1[$.
 - En déduire les coefficients du développement en série entière de f .
- 73. (IMT MP)** On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$.
- Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $n!/3 \leq a_n \leq n!$.
 - Déterminer le rayon de convergence de la série entière définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$.
 - Déterminer une équation différentielle vérifiée par S ; en déduire une expression de S .
- 74. (TPE MP)** Soit $S : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) t^n$.
- Donner le rayon de convergence de cette série entière.
 - Écrire $(1-t)S(t)$ sous forme de série entière; en déduire que $(1-t)S(t) + \ln(1-t)$ admet une limite finie en 1^- .
 - Donner un équivalent de $S(t)$ en 1^- .

Équations différentielles

- 75.** Résoudre $(E) : (\cos t)y' - (\sin t)y = \cos^3 t$ sur $[0, \pi/2[$, puis sur $[0, \pi]$.
- 76. (IMT MP)** Soit $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.
- Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0.
 - Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(\mathbb{R}_-^*$ en posant respectivement $x = t^2$ et $x = -t^2$.
 - Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Fonctions de plusieurs variables

- 77.** (ENSAM PSI) Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + x^2y + y^3$.
- Montrer que f admet un seul point critique, et que ce point n'est pas un extremum local.
 - Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que la restriction de f à D admet un minimum et un maximum ; les déterminer.
- 78.** On travaille dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel. Soient f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives, et $u \in \mathbb{R}^n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $g(x) = (f(x) \mid x) - (u \mid x)$.
- Montrer que g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$; montrer qu'elle admet des dérivées partielles en tout point, les préciser.
 - Montrer que g admet un unique point critique z , que l'on déterminera.
 - Montrer que g admet un minimum global en z .

Probabilités

- 79.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.
- Montrer que $\forall x \in [0, 1] \quad x(1-x) \leq 1/4$.
 - Soient A et B deux événements incompatibles. Montrer que $P(A)P(B) \leq 1/4$.
 - Soient A et B deux événements quelconques.
 - Montrer que $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A \cap B)P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B)P(A)$.
 - Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq 1/4$.
- 80.** Une puce se déplace sur un triangle équilatéral ABC . Elle se situe en A à l'instant 0.
Si elle est en A ou en B à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n+1$, de manière équiprobable.
Si elle est en C à un instant, alors elle reste en C à l'instant suivant.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement "La puce est en A (resp B, C) à l'instant n "; et on note u_n (respectivement v_n, w_n) la probabilité $P(A_n)$ (respectivement $P(B_n), P(C_n)$).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_n, v_n et w_n .
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Déterminer $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = M^n X_0$.
 - Donner les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n .
 - Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$? Commenter.
- 81.** Soit $p \in]0, 1[$; soient X_1 et X_2 , deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p .
- Déterminez les lois des variables aléatoires suivantes :
 - $Y = \min\{X_1, X_2\}$;
 - $S = X_1 + X_2$.
 - En reconnaissant la loi de Y , donnez son espérance et sa variance.
 - Calculez $P(X_1 = X_2)$.

- 82.** On cherche à obtenir toutes les pièces d'un puzzle de N pièces différentes. On achète chaque semaine une pièce emballée, chaque pièce étant équiprobable. On note Y_k la variable aléatoire qui associe le nombre de semaines nécessaires pour avoir une k -ième nouvelle pièce à partir du moment où on en a déjà $k-1$.
- Les Y_k sont-ils mutuellement indépendants? Quelle est la loi de Y_1 ?
 - Donner, pour tout k , la loi de Y_k , ainsi que son espérance et sa variance.
- b.** On introduit X la variable aléatoire comptant le nombre de coups nécessaires pour avoir les N pièces différentes du puzzle.
- Exprimer X en fonction des Y_k , puis exprimer l'espérance en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 - En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de H_n .
 - En déduire un équivalent de l'espérance.
- 83.** (CCP PSI) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi. On pose $Z = X + Y + 1$, et on suppose que Z suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
- Déterminer l'espérance et la variance de X .
 - Déterminer la fonction génératrice G_X de X , et en déduire la loi de X .
- 84.** **a.** On considère la série entière $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^n}{2^n}$.
- Calculer son rayon de convergence.
 - Rappeler la somme des séries $\sum_{n \geq 0} t^n$ et $\sum_{n \geq 1} nt^{n-1}$.
 - Pour t convenable, calculer la somme $S(t)$.
- b.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de fonction génératrice $G_X = \lambda S$ où $\lambda > 0$.
- Rappeler la définition d'une fonction génératrice, calculer λ et exprimer $P(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Rappeler les expressions liant $E(X)$, $V(X)$, et G_X et ses dérivées. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
- 85.** **a.** Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $P(X = n) = \frac{p}{n} P(X = n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X .
- b.** Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .
- Déterminer l'espérance de $Y = \frac{1}{1 + X_1}$.
 - Rappeler (sans la démontrer) la loi suivie par $X_1 + X_2$. Déterminer la loi et l'espérance de X_1 sachant $(X_1 + X_2 = n)$.
- c.** On considère 3 variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 , λ_2 et λ_3 . On pose $U = X_1 + X_2$ et $V = X_2 + X_3$.
Calculer le coefficient de corrélation $\rho(U, V) = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sigma(U)\sigma(V)}$.

Indications

- 4. Former le trinôme dont les racines sont x et y , et le mettre sous forme canonique.
- 5. **a.** Pour le degré, calculer $\varphi(X^k)$. **b.** Pour obtenir un antécédent de Q de degré n , étudier la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n+2}[X]$.
- 11. Noter que Δ est un polynôme en x dont on étudiera le degré, et calculer les $\Delta(a_i)$.
- 16. **a.** Écrire la matrice de p dans une base bien choisie. **c.** La matrice B est de la forme $I_n + V^t V$, et $V^t V$ est colinéaire à une matrice de projection.
- 23. **b.** Que vaut $\text{rg } H$? **c.** Exprimer A en fonction de H et I_n .
- 28. Si la suite (A^k) converge vers B , que vaut B^2 ?
- 31. Ces matrices ont un et un seul coefficient non nul dans chaque ligne et chaque colonne.
- 37. Si la fonction n'est pas constante, montrer qu'elle admet un extremum global.
- 51. **c.** Dans le cas général, utiliser la fonction f du **b** pour se ramener au cas $\ell = 0$.
- 55. **c.** Déterminer la limite de nI_n .
- 61. **a.** Comparer à une intégrale. **c.** Majorer le reste $R_n(x)$ en minorant les $\ln(k+1)$ par $\ln(n+1)$.
- 65. **b.** Interversion somme/limite. **c.** Utiliser la comparaison à une intégrale.
- 68. Justifier la convergence uniforme de la série sur $]0, 1]$ en utilisant le TSSA.
- 74. **b.** Montrer que la série entière définissant $(1-t)S(t) + \ln(1-t)$ converge normalement sur le segment $[0, 1]$.
- 77. **a.** Pour montrer qu'on n'a pas extremum, étudier $f(0, y)$. **b.** Les extremums sont sur la frontière; étudier $f(\cos t, \sin t)$, en l'exprimant en fonction de $\sin t$.
- 78. **a.** Utiliser la définition de la différentiabilité; puis déterminer le gradient, en utilisant la symétrie de f .
- 79. **b.** $B \subset \overline{A}$. **c.i.** Remplacer $P(\overline{A})$ par $1 - P(A)$, puis regrouper convenablement les termes. **c.ii.** On peut appliquer **b** aux deux termes du membre de droite dans l'égalité **c.i.**