# Spéciales MP$^*$ – 18/19

## Exercices posés à l'oral des Mines en 2018

### Algèbre générale

**1.** Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement si tout entier supérieur ou égal à $(a-1)(b-1)$ peut s'écrire sous la forme $au+bv$, avec $(u,v) \in \mathbb{N}^2$.

**2.** Soit $S_{n+1}$ le groupe des permutations de $[\![1, n+1]\!]$ ; soit $H$ l'ensemble des permutations laissant $n+1$ invariant.

**a.** Montrer que $H$ est un sous-groupe de $S_{n+1}$ ; quel est son cardinal ?

**b.** Déterminer une partie finie $\{s_1, \ldots, s_k\}$ de $S_{n+1}$ telle que $S_{n+1}$ soit réunion disjointe des parties $s_i H = \{s_i \circ \sigma ; \sigma \in H\}$.

**3.** Soit $G$ un groupe cyclique, de cardinal $n$.

**a.** Montrer que tout sous-groupe de $G$ est cyclique.

**b.** Soit $d$ un diviseur de $n$ ; montrer que $G$ admet exactement un sous-groupe de cardinal $d$.

**c.** Montrer que $\quad n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) \quad$ où $\varphi$ est l'indicatrice d'Euler.

**4. a.** Montrer que $P = X^3 - X - 1$ admet une unique racine réelle $a$.

**b.** Donner une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V$ engendré par $\{a^k ; k \in \mathbb{N}\}$.

**c.** L'ensemble $V$ est-il un sous-corps de $\mathbb{R}$ ?

**5.** Soit $\theta_0 \in \,]0, \pi/2[$. Soit $D = \{e^{i\alpha} \;;\; \alpha \in \,]-\theta_0, \theta_0[\}$. Soient $z \in D$, et $u$ un nombre complexe de module 1 tel que $u \notin D$.
Montrer que $\quad |u-z| + |\overline{u}-z| \leqslant 2|u-1|, \quad$ puis que $\quad |u-z| \times |\overline{u}-z| \leqslant |u-1|^2$.

**6.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de $X^n + 1$. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

Montrer que $\quad XP'(x) = \dfrac{nP(X)}{2} + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$.

**7. a.** Montrer que $P = X^3 - X^2 - X - 1$ a trois racines distinctes $a$, $b$ et $c$ dans $\mathbb{C}$.

**b.** Montrer que $\quad \dfrac{a^{1000} - b^{1000}}{a-b} + \dfrac{b^{1000} - c^{1000}}{b-c} + \dfrac{c^{1000} - a^{1000}}{c-a} \quad$ est un entier naturel.

**8.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, tel que $P(0) = 1$ ; soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \varepsilon$ et $|P(z)| < 1$.

### Algèbre linéaire élémentaire

**9.** Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{rg} A \geqslant n$, $\operatorname{rg} B \geqslant n$, et $A^2 = B^2 = 0$. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables.

**10.** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\quad |a_{ii}| > \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i} |a_{ij}| \quad$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

**a.** Montrer que $A$ est inversible.

**b.** On suppose de plus les $a_{ii}$ strictement positifs. Montrer que $\det A > 0$.

**11.** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $F$ est un sous-espace de $E$ stable par $u$, on note $u_F$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$.
On pose $\quad N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Ker}(u^k) \quad$ et $\quad I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Im}(u^k)$.

**a.** Montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $N = \operatorname{Ker}(u^n)$ et $I = \operatorname{Im}(u^n)$.

**b.** Montrer que $E = N \oplus I$, que $N$ et $I$ sont stables par $u$, que $u_N$ est nilpotent et que $u_I$ est bijectif.

**c.** Réciproquement, on suppose que $E = F \oplus G$, que $F$ et $G$ sont stables par $u$, que $u_F$ est nilpotent et que $u_G$ est bijectif. Montrer que $F = N$ et $G = I$.

**12.** Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe deux matrices $U$ et $V$ inversibles telles que $\quad \operatorname{rg}(UA + BV) = \min\{n, \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B\}$.

**13.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ; soit $P = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \sum_{i=1}^n {x_i}^k$ ; on a donc $N_0 = n$.

**a.** Exprimer la matrice $D = (N_{i+j-2}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en fonction de la matrice $X = ({x_i}^{j-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire une expression simple de $\Delta = \det D$.

**b.** Déterminer $\Delta$ dans les cas $n = 2$, $P = X^2 + aX + b$ et $n = 3$, $P = X^3 + pX + q$. Interprétation ?

### Réduction des endomorphismes

**14.** On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ; montrer l'équivalence des deux phrases :

**i.** $A$ est diagonalisable ;

**ii.** pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\quad P(A) \in \mathcal{N} \Longrightarrow P(A) = 0$.

**15.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisable. Soit $C(M) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

**i.** $M$ a $n$ valeurs propres distinctes ;

**ii.** $\dim C(M) = n$ ;

**iii.** $\forall A \in C(M) \quad \exists P \in \mathbb{C}[X] \quad A = P(M)$ ;

**iv.** $\forall (A, B) \in C(M)^2 \quad AB = BA$.

**16.** Soient $E$ un espace de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

**a.** (*ajouté par moi*) Si $f$ est un isomorphisme, montrer que $f^{-1}$ est un polynôme en $f$.

**b.** Si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, montrer que le projecteur sur $\operatorname{Im} f$ de direction $\operatorname{Ker} f$ est un polynôme en $f$.

**17.** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$ ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

**a.** On suppose, uniquement dans cette question, que $f$ admet $n$ valeurs propres distinctes. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres, et $x_0 = \sum_{i=1}^n e_i$.
Montrer que $\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de $E$.

**b.** Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $\big(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ soit une base de $E$.

**18.** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$ ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\big(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ soit une base de $E$, si et seulement si les sous-espaces propres de $f$ sont tous de dimension 1.

**19.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**a.** On suppose que $A^3 = A^2$. Donner une expression simple de $\exp(A)$.

**b.** On suppose que $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$. Donner une expression simple de $\exp(A)$.

**20.** Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Comparer $\operatorname{Ker} N$ et $\operatorname{Ker}\big(\exp(N) - I_n\big)$.

### Espaces euclidiens

**21.** Soit $E$ un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ; soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $E$. On note $M$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la $j$-ième colonne contient les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $e_j - x_j$, et ce pour tout $j$.

**a.** Exprimer $\operatorname{tr}({}^tMM)$ en fonction des vecteurs $e_j$ et $x_j$.

**b.** On suppose que $\sum_{i=1}^n \|e_i - x_i\|^2 < 1$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $E$.

**22. a.** (*ajouté par moi*) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $a_{ij} = \min\{i, j\}$ pour tout $(i, j)$. Montrer que $(X, Y) \longmapsto {}^tXAY$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (identifié à l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

**b.** Soit $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ ; soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $a_{ij} = \beta_i \beta_j \min\{i, j\}$ pour tout $(i, j)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(X, Y) \longmapsto {}^tXAY$ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

**23.** On munit $\mathcal{C}^0\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ du produit scalaire $\quad (f, g) \longmapsto (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. $\quad$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**a.** Montrer qu'il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad (A_n|P) = P(0)$.

**b.** Montrer que $A_n$ a $n$ racines simples dans $]0, 1[$.

**24.** Soit $E$ un espace euclidien. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $K(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $I(f) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

**a.** Si $f$ est une isométrie, montrer que $K(f)$ et $I(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

**b.** Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ une famille libre de vecteurs de $E$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note $s_i$ la réflexion d'hyperplan ${x_i}^\perp$.
Montrer que $I(s_p \circ s_{p-1} \circ \cdots \circ s_1) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$.

**25.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et semblable à son inverse. Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) \geqslant n$, et que l'on a égalité si et seulement si $A$ est une matrice de symétrie orthogonale.

**26.** Soit $E$ un espace euclidien, et $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $E$. Si $f \in \mathcal{S}(E)$, on pose $H_f = \big\{x \in E \,|\, \big(x|f(x)\big) = 1\big\}$.

**a.** Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Étudier l'existence de $x \in H_u$ vérifiant $\|x\| = 1$.

**b.** Soient $u$ et $v$ dans $\mathcal{S}(E)$. On suppose que les valeurs propres de $v$ sont toutes strictement positives. Montrer que $v^{-1} \circ u$ est diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $v^{-1} \circ u$ pour que $H_u \circ H_v$ soit non vide.

**27.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**a.** Montrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont même polynôme caractéristique.

**b.** Montrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont semblables.

**28.** **a.** Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $V$, orthogonalement semblable à $U$, telle que ${}^tVV$ soit diagonale.

**b.** Soit $E$ un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$, telle que $f(\mathcal{B})$ soit une famille orthogonale.

**29.** On note $\mathcal{S}_n^+$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles (respectivement strictement positives).
Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $B \in \mathcal{S}_n^+$.

**a.** Montrer qu'une matrice symétrique $M$ est dans $\mathcal{S}_n^+$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}$) si et seulement si, pour toute colonne $X$ non nulle, ${}^tXMX \geqslant 0$ (respectivement ${}^tXMX > 0$).

**b.** Montrer qu'il existe une unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AC + CA = B$.

**c.** Montrer que $C \in \mathcal{S}_n^+$.

**d.** Montrer que, si $B \in \mathcal{S}_n^{++}$, alors $C \in \mathcal{S}_n^{++}$ ; montrer que la réciproque est fausse.

### Analyse élémentaire

**30.** Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \left\lfloor n^{1/i} \right\rfloor = \sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln k} \right\rfloor$.

**31.** Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^1$, vérifiant $\forall x \in [0,1] \quad f'(x) \geqslant f(x)^3$. Montrer que $\sqrt{2} f(0) \leqslant 1$.

**32.** Soit $f : \,]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^1$. On suppose qu'il existe $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \ell_1$ et $xf'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \ell_2$. Que vaut $\ell_2$ ?

**33.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\displaystyle I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x}\, dt$.

**a.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $I_n(x)$.

**b.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite $\big(I_n(x)\big)$. En déduire une expression de $I_n(x)$ pour tout $n$.

**34.** Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs strictement positives. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\displaystyle \varphi(f) = \left(\int_a^b f(t)\, dt\right)\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\right)$.

**a.** Montrer que $\varphi$ est minorée sur $E$, et atteint sa borne inférieure.

**b.** Déterminer $\varphi(E)$.

**35.** Soit $f$ de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant \int_x^{x+1} \big(|f(t)| + |f'(t)|\big)\, dt$.

**36.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

**a.** On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,dt$. Montrer que $f$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

**b.** On suppose qu'il existe $a$ et $m$ dans $]0,1[$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leqslant af(mx) + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,dt$. Montrer que $f$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

### Espaces vectoriels normés

**37.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; on pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\|\ \|$ est une norme sur $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$, on pose $N(u) = \sup\left\{\dfrac{\|u(M)\|}{\|M\|}\ ;\ M \in E \setminus \{0\}\right\}$. Soient $f : M \longmapsto M + {}^tM$ et $g : M \longmapsto M - {}^tM$.

**a.** Si $A = (a_{ij}) \in E$, on pose $\|A\| = \displaystyle\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$. Déterminer $N(f)$ et $N(g)$.

**b.** Même question en prenant $\|A\| = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

**38.** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel normé $E$. Soit $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Montrer que les quatre énoncés suivants sont équivalents :

**i.** $u$ est continu ;

**ii.** $u^{-1}(S)$ est un fermé ;

**iii.** l'image par $u$ de toute suite bornée, est bornée ;

**iv.** l'image par $u$ de toute suite de limite $0_E$, a pour limite $0_E$.

**39.** Soit $K$ un compact d'un espace vectoriel normé $E$.

**a.** Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties fermées non vides de $K$, décroissante pour l'inclusion. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n \neq \emptyset$.

**b.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $K$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction continue $g$ ; on suppose de plus que, pour tout $x \in K$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ décroît. Montrer que la convergence est uniforme sur $K$.

**40.** On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ de la norme $\|\ \|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n$ le sous-espace de $E$ constitué des fonctions polynômiales de degré au plus $n$.

**a.** Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $p \in E_n$ tel que $\forall q \in E_n \quad \|f-p\|_\infty \leqslant \|f-q\|_\infty$.
On dit alors que $p$ est une meilleure approximation en degré $n$ de $f$.

**b.** On suppose trouvés $q \in E_n$, et $n+2$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, tels que $-1 \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leqslant 1$ et $f(x_i) - q(x_i) = (-1)^i \|f-q\|_\infty$ pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$.
Montrer que $q$ est une meilleure approximation en degré $n$ de $f$.

**c.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $T_n$ par $\forall t \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos t) = \cos(nt)$. Soit $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{T_{3^k}}{2^k}$.
Montrer que $g \in E$, et étudier sa meilleure approximation en degré $n$.

### Suites et séries numériques

**41.** Soit $(x_n)$ une suite vérifiant $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n + 1/x_n$. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

**42.** Soit $(u_n)$ une suite vérifiant $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \operatorname{Arctan} u_n$.

**a.** Montrer que la suite tend vers 0.

**b.** Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{2^n}$.

**c.** Donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n$.

**43.** Déterminer les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $a^n + b^n + c^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**44.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} (X-k)$.

**a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $x_n \in ]0,1[$ tel que $P_n'(x_n) = 0$.

**b.** Montrer que $(x_n)$ tend vers 0, puis en donner un équivalent simple.

**45.** Soient $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, et $p \in \mathbb{N}^*$.

**a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $a_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $\displaystyle\int_0^{a_n} \big(f(t)+1\big)^{1/n}\,dt = \frac{1}{n^p}$.

**b.** Donner un équivalent de $a_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**46.** Étudier la nature de la série de terme général $a_n = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{n^2}{n^2+2}\right)$.

**47.** En groupant les termes par paquets de deux termes consécutifs, déterminer la nature de la série de terme général $a_n = \dfrac{(-1)^n \cos(\ln n)}{n}$.

**48.** **a.** (*rajouté par moi*) Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,dt$.

**b.** Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,dt$ ; en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$.

**49.** **a.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels $\beta$ et $a$ pour que la série $\sum_k k^\beta a^k$ converge.

**b.** On suppose $|a| < 1$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} k^\beta a^k$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**50.** Soit $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) > 0$ et $f'(x) < 0$. Soit $(a_n)$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = a_n f(a_n)$.

**a.** Montrer que la suite $(a_n)$ est décroissante positive, et tend vers 0.

**b.** Montrer que la série $\sum a_n$ diverge.

**51.** Existe-t-il une suite réelle $(a_n)$ telle que $\displaystyle\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{\,k} = \frac{1}{k^2}$ ?

### Intégration

**52.** Montrer que $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4\sqrt{x}}{\pi}$. On pourra considérer $\displaystyle I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,dt$.

**53.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(x^4+x+1)$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, mais que $f$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

**54.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose trouvé $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t)\,dt$ converge. Montrer que, pour tout $s \geqslant s_0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ converge.

**55.** (*Lavez-vous soigneusement les mains après avoir traité celui-là, il traîne partout depuis des décennies.*) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$.

**56.** Soit $f$ de classe $C^1$ de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ ; on suppose de plus que $(f')^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que $t \longmapsto f(t)^2/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

### Intégrales dépendant d'un paramètre

**57.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt$.

**a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $u_n$ et $u_{n+2}$.

**b.** Déterminer la limite de $u_n$, puis un équivalent.

**c.** Montrer que la série $\sum u_n$ converge, et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

**58.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, vérifiant $f(0) \neq 0$.

**a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}}\,dt$.

**b.** Déterminer la limite de $I_n$, puis un équivalent simple.

**59.** Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe un réel $M$ vérifiant $\forall x > 0 \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{itx} - 1}{x} \right| |f(t)| \, dt \leqslant M.$

**a.** Montrer que la fonction $t \longmapsto t f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

**b.** Déterminer la limite quand $x$ tend vers $0^+$ de $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{x} f(t) \, dt.$

**60.** Soit $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t(1 + t^x)} \, dt.$

**a.** Déterminer le domaine de définition de $F$.

**b.** Montrer que l'équation $F(x) = 0$ admet une et une seule solution.

**61. a.** Déterminer le domaine de définition de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(it^x) \, dt.$

**b.** Étudier la continuité de $f$ ; donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

### Suites et séries de fonctions

**62.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{1 + x^k}.$

**63.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{2^n x^{2^n - 1}}{1 + x^{2^n}}.$

**a.** Déterminer le domaine de définition $D$ de $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

**b.** Calculer $f(x)$ pour $x \in D$.

**64.** Soit $(u_n)$ la suite de fonctions de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $u_0$ est constante égale à 1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in ]-1, +\infty[$, $u_n(x) = \dfrac{n}{x + n} u_{n-1}(x).$

**a.** Déterminer le domaine de définition $D$ de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

**b.** Calculer $S(x)$ pour $x \in D$.

**65.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{(-1)^n f(x)}{\sqrt{1 + n^2 f(x)^2}}.$ Soit enfin $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

**a.** Déterminer le domaine de définition $D$ de $S$.

**b.** La convergence est-elle uniforme sur $D$ ?

**c.** Montrer que, si $f$ est continue, alors $S$ l'est aussi. Étudier la réciproque.

**66. a.** Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0 \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

**b.** Montrer que $f$ est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$ ; calculer $\int_1^{+\infty} f(t) \, dt$.

### Séries entières

**67.** Soient $(a_n)$ une suite complexe, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\left| \dfrac{a_{n+k}}{a_n} \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$ Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

**68.** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$

**69.** Soit $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$ Montrer que $F$ est définie et continue sur $[0, 1]$, et donner un équivalent de $F(1) - F(x)$ quand $x$ tend vers $1^-$.

**70.** On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\,dt.$

**a.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**b.** Déterminer la somme de la série.

**71.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ i+j=n} \frac{1}{i^2 j^2}$.

**a.** Déterminer un équivalent simple de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**b.** Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} u_n x^n$, et calculer sa somme.

**72.** Montrer qu'il existe $a > 0$ et une fonction $f : ]-a, a[ \longrightarrow \mathbb{R}$, somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geqslant a$, tels que $\quad \forall t \in ]-a, a[ \quad tf'(t) = t + f(t)^2$.

**73.** Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad p_n(z) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\Big(1 - \frac{z}{2^k}\Big)$.

**a.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que la suite de terme général $\ln\big(p_n(-|z|)\big)$ converge, et que la suite $\big(p_n(z)\big)$ est bornée.

**b.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que la suite $\big(p_n(z)\big)$ converge ; on note $f(z)$ sa limite.
Montrer que $\quad \forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = (1-z)f(z/2)$.

**c.** Montrer que $f$ est continue en 0, puis qu'elle est développable en série entière au voisinage de 0.

**74.** **a.** Montrer que $f : t \longmapsto \exp\big(t(1-t)^2\big)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

**b.** Montrer que, dans ce développement, il n'y a pas trois coefficients consécutifs nuls.

**75.** Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant un développement en série entière au voisinage de 0. On suppose qu'il existe une suite $(z_p)$ de complexes non nuls, convergeant vers 0, telle que $f(z_p) = 0$ pour tout $p$. Montrer que les coefficients de la série entière sont tous nuls.

**76.** Soient $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que, pour tout $x \in ]-a, a[$, la fonction $\quad t \longmapsto f(t)e^{xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ; pour $x \in ]-a, a[$, on pose $\quad L(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{xt}\,dt$.

**a.** Montrer que $L$ est développable en série entière au voisinage de 0.

**b.** Montrer que la fonction $\ln L$ est convexe.

**77.** Soient $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ ; pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\quad F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(xt)\,dt$.

**a.** Déterminer le domaine de définition de $F$, et étudier sa continuité.

**b.** On suppose de plus que $f$ est nulle en dehors d'un segment $[0, A]$. Montrer que $F$ est développable en série entière au voisinage de tout point.

**c.** On suppose de plus que $F$ est nulle sur un ouvert non vide. Montrer que $F$ est nulle sur $\mathbb{R}$, puis que $f$ l'est aussi.

### Équations différentielles

**78.** Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On étudie l'équation différentielle $(E) : y' = t^\alpha y + t^\beta$ sur $I = [1, +\infty[$.

**a.** Dans le cas $\alpha \neq -1$, donner une expression de la solution $y_1$ de $(E)$ sur $I$ vérifiant $y_1(1) = 0$.

**b.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta)$ pour que les solutions de $(E)$ soient toutes bornées sur $I$.

**79.** Soit $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $(E) : y'' + q(t)y = 0$.

**a.** Soit $y$ une solution de $(E)$ bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\quad y'(t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**b.** Montrer que $(E)$ admet des solutions non bornées sur $\mathbb{R}_+$.

### Fonctions de plusieurs variables

**80.** Étudier les extremums de $f : (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - (x - y)^2$.

**81.** Déterminer l'ensemble image de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (\cos x + \cos y, \sin x + \sin y)$.

**82.** Soient $E$ un espace euclidien et $u$ une isométrie de $E$. Pour tout vecteur $x$ non nul de $E$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{\big(u(x) \,|\, x\big)}{\|x\|^2}$.

**a.** Montrer que $\varphi$ est bornée sur $E \setminus \{0_E\}$, et atteint ses bornes.

**b.** Montrer que $E \setminus \{0_E\}$ est un ouvert, et que $\varphi$ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$. Calculer le gradient de $\varphi$ en tout point de $E \setminus \{0_E\}$.

**c.** En déduire que, si $\varphi$ présente un extremum en $x_0$, alors $\mathrm{Vect}\big(x_0, u(x_0)\big)$ est stable par $u$.

**d.** Donner la valeur des extremums de $\varphi$ en fonction de la forme réduite de la matrice de $u$.

**83.** Déterminer les fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que la fonction $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x^2 - y^2)$ vérifie $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 1$.

**84.** Soient $C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\big\}$ et $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy < 1\big\}$.

**a.** Représenter $C$ et $D$. Sont-elles ouvertes ? fermées ?

**b.** Montrer que $f : (x, y) \in D \setminus C \longmapsto \dfrac{\ln(1 - xy)}{xy}$ est prolongeable en une fonction $C^\infty$ sur $D$.

### Probabilités

**85.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $[\![1, n]\!]$.

**86.** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \neq 0$. On choisit successivement, aléatoirement et indépendamment deux parties $A$ et $B$ de $E$, chaque partie étant équiprobable. On pose $I = \mathrm{Card}(A \cap B)$ et $U = \mathrm{Card}(A \cup B)$.

**a.** Déterminer la loi de $I$.

**b.** Montrer que $I$ et $U$ ont une variance, et les calculer.

**87.** On dispose de $n$ ampoules, qui sont aléatoirement et indépendamment éteintes ou allumées, l'ampoule numéro $i$ étant allumée avec la probabilité $p_i$. Soit $Y$ la variable aléatoire donnant le nombre d'ampoules allumées.

**a.** Déterminer l'espérance et la variance de $Y$.

**b.** On suppose connue l'espérance $E(Y) = m$. Comment choisir les $p_i$ de manière à ce que $V(Y)$ soit maximale ?

**88.** On lance deux dés ; soient $X$ et $Y$ les résultats donnés par chaque dé, et $S = X + Y$. On veut prouver qu'il est impossible de truquer les dés de manière à ce que $S$ suive la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$ ; on raisonne pour cela par l'absurde, en supposant que $S$ suit la loi uniforme.

Soit $G_S$ la fonction génératrice de $S$ ; montrer que c'est un polynôme, dont la seule racine réelle est 0. Conclure.

**89.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète, d'espérance finie.

**a.** On suppose $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $P(X \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

**b.** Même question, en supposant maintenant $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

**90.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On effectue des tirages sans remise tant que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, où $n_j$ est le numéro de la boule tirée au $j$-ième tirage. Soit $X$ la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de $X$ et calculer son espérance.

**91.** Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, $X$ et $Y$ des variables aléatoires réelles discrètes sur $\Omega$, admettant une variance.

**a.** Montrer la sommabilité de $\big((X(\omega') - X(\omega))\,(Y(\omega') - Y(\omega))\,P(\omega)P(\omega')\big)_{(\omega,\omega') \in \Omega^2}$, et exprimer la somme en fonction de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

**b.** Qu'en déduire lorsque, pour tout $(\omega, \omega') \in \Omega^2$, on a $X(\omega) \leqslant X(\omega') \Longleftrightarrow Y(\omega) \leqslant Y(\omega')$ ?

**92.** Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r.d. sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant la même loi, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $E(X/Y) \geqslant 1$.

**93.** Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r.d. indépendantes sur un même espace probabilisé. On suppose que $X$ suit une loi de Poisson. Montrer que $Y$ suit une loi de Poisson si et seulement si $X+Y$ suit une loi de Poisson.

**94.** **a.** Pour quelle(s) valeur(s) du réel $\alpha$ existe-t-il une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ ?

**b.** On suppose cette condition réalisée ; montrer que $X$ admet un moment d'ordre 2.

**95.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et majorée. Soit $X$ une v.a.r.d.

**a.** Montrer que $f(X)$ admet un moment d'ordre $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ; ce moment sera noté $M_n$.

**b.** Montrer que $M_n^{1/n}$ a une limite finie $\ell$ que l'on précisera, quand $n$ tend vers $+\infty$.

**96.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, suivant toutes la même loi. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$, on pose $R_n(\omega) = \mathrm{Card}\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$.

**a.** Montrer que $\forall (a,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad E(R_n) \leqslant a + nP(X_1 \geqslant a)$.

**b.** Montrer que $E(R_n) = o(n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**c.** On suppose que $X_1$ est d'espérance finie ; montrer que $E(R_n) = O(\sqrt{n})$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**97.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi, telles que $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$. Soit $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

**a.** Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $E(e^{tS_n}) = (\mathrm{ch} t)^n$ ; en déduire que $E(e^{tS_n}) \leqslant \exp(nt^2/2)$.

**b.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right)$ ; En déduire que $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-n\varepsilon^2/2\right)$.

**98.** Soit $X$ une v.a.r.d. Soit $M_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto E(e^{tX})$.

**a.** On suppose, uniquement dans cette question, que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer le domaine de définition $D$ de $M_X$, et donner une expression simple de $M_X(t)$ pour $t \in D$.

**b.** Soit $a > 0$ ; on suppose que $M_X$ est définie sur $]-a, a[$.
Montrer que $M_X$ est de classe $C^\infty$ sur $]-a, a[$, et préciser la valeur de $M_X^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

## Indications

**1.** S'ils ne sont pas premiers entre eux, montrer que $(a-1)(b-1)$ n'est pas de la forme $au+bv$. S'ils sont premiers entre eux et si $p \geqslant (a-1)(b-1)$, prendre $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au+bv=p$ avec $u \geqslant 0$ le plus petit possible, et montrer que $v \geqslant 0$.
**2. b.** Penser aux images possibles de $n+1$.
**3.** Dans tout l'exercice, noter que l'on peut supposer $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou $G = \mathbb{U}_n$. **a.** Si $H$ est un sous-groupe et $a$ est un générateur de $G$, considérer le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k \in H$. **b.** Les éléments $b$ du sous-groupe doivent vérifier $b^d = e$.
**4. b.** Montrer que $a$ n'est pas rationnel, et n'est pas racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 2 en considérant son PGCD avec $P$. **c.** Pour l'inverse d'un élément $b$, considérer l'application $\mathbb{Q}$-linéaire $x \in V \longmapsto bx \in V$.
**5.** Pour la première inégalité, exprimer les modules en fonction des arguments de $z$ et $u$, et factoriser la somme de sinus ; pour la deuxième, utiliser le fait que $x(a-x)$ est maximal en $a/2$.
**6.** Il suffit de l'établir dans le cas $P = X^p$. Mettre la fraction $\sum \dfrac{z_k^{p+1}}{X - z_k}$ sous la forme $\dfrac{A}{B}$, en utilisant le fait que le coefficient d'un pôle simple $a$ dans la DES est $A(a)/B'(a)$.
**7. b.** Remplacer 1000 par $n$ ; la suite obtenue vérifie une récurrence linéaire d'ordre 3.
**8.** Mettre $P(z)$ sous la forme $1 + \alpha z^k + z^{k+1}Q(z)$ et choisir $z$ tel que $\alpha z^k \in \mathbb{R}_-^*$.
**9.** Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A$, et que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.
**10. a** Si $X \in \operatorname{Ker} A$, prendre $i_0$ tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty$, et étudier l'équation $i_0$ dans le système $AX = 0$. **b.** Montrer que les valeurs propres réelles sont positives en utilisant les mêmes techniques.
**11. a.** Les noyaux sont croissants et les images décroissantes pour l'inclusion. Prendre $n$ tel que $\dim \operatorname{Ker} u^n$ soit maximal, la formule du rang donne $I = \operatorname{Im} u^n$. **b.** Si $N \cap I \neq \{0\}$, obtenir une contradiction en considérant $\operatorname{Ker} u^{2n}$. **c.** Montrer $F \subset N$ et $G \subset I$.
**12.** Cela revient à trouver $A'$, de même rang que $A$, telle que $A' + B$ ait le rang donné. Commencer par le cas $B = J_r$.
**13. a.** $D = {}^tXX$, et $\det X$ est un Vandermonde. **b.** Pour $n = 2$, on retrouve le discriminant ; pour $n = 3$, commencer par calculer les $N_i$, en notant que $N_1 = 0$, et que les relations $x_i^3 = -px_i - q$ permettent de calculer $N_3$ et $N_4$ à partir de $N_1$ et $N_2$ ; $4p^3 + 27q^2 = 0$ est une CNS classique pour que $P$ ait une racine multiple.
**14.** Pour **ii.** $\Longrightarrow$ **i.**, prendre $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$.
**15.** Se ramener au cas où $M$ est diagonale, et montrer systématiquement l'équivalence à **i**.
**16. a.** Partir de $\chi_f(f) = 0$. **b.** Écrire la matrice de $f$ dans une base adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, appliquer le **a** au bloc inversible qui apparaît.
**17. b.** Si $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre, poser $\chi_f = \prod (X - \lambda_i)^{q_i}$, décomposer $E$ en somme directe des $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{q_i} = C_i$, montrer qu'il existe $x_i \in C_i$ tel que $[(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{q_i - 1}](x_i) \neq 0_E$, prendre $x = \sum x_i$.
**18.** Pour le sens direct, écrire la matrice de $f$ dans la base donnée. Pour la réciproque, on peut reprendre les indications de l'exercice précédent. On peut aussi justifier qu'une composée de $k$ endomorphismes de rang $n-1$ est au moins de rang $n-k$, ce qui permet de prouver qu'aucun polynôme de degré $n-1$ n'annule $f$, ce qui nous ramène à l'exo précédent.
**19. b.** On peut commencer par calculer $B_n = A^{n+1} - A^n$, qui vérifie une récurrence simple.
**20.** Pour l'inclusion non triviale, multiplier la relation $\big(\exp(N) - I_n\big)X = 0$ par les bons $N^k$ pour montrer que $N^jX = 0$ pour tout $j$.
**21. a.** C'est $\sum_{i=1}^n \|e_i - x_i\|^2$. **b.** Montrer que 1 n'est pas valeur propre de ${}^tMM$ (ses valeurs propres sont positives) puis que 0 n'est pas valeur propre de la matrice de $\mathcal{F}$.
**22. a.** Décomposer $A$ en somme de $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix}$ où les coefficients de $J_k$ valent tous 1. Cela permet d'exprimer ${}^tXAX$ en fonction des nombres $y_k = \sum_{i=k}^n x_i$. **b.** S'inspirer de ce qui précède.
**23. a.** C'est le théorème de représentation des formes linéaires sur un espace euclidien. **b.** Noter $\beta_1, \ldots, \beta_p$ les racines de $A_n$ d'ordre impair appartenant à $]0,1[$. En supposant $p < n$, considérer le polynôme $P = X \prod (X - \beta_i)$.
**24. a.** Il suffit de prouver l'orthogonalité. **b.** Il faut prouver que l'ensemble des invariants est l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$. Pour l'inclusion non triviale, noter que $[s_{p-1} \circ \cdots \circ s_1](x)$ est de la forme $x - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i$.
**25.** Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + 1/x \geqslant 2$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

**26. a.** Si les valeurs propres de $u$ sont $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p$, montrer que, quand $x$ décrit la sphère unité, $\big(x|u(x)\big)$ décrit $[\lambda_1, \lambda_p]$. **b.** L'application $(x,y) \longmapsto \big(x|v(y)\big)$ est un produit scalaire, pour lequel $v^{-1} \circ u$ est symétrique. Montrer que l'on est ramené au problème précédent.
**27. a.** Classiquement, $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique : elles sont semblables si $A$ est inversible, puis utiliser un argument de densité. **b.** Les deux matrices sont diagonalisables.
**28. a.** Diagonaliser ${}^tUU$. **b.** Prendre pour $U$ la matrice de $u$ dans une base orthonormée quelconque ; la matrice de passage trouvée en **a** donne la base cherchée.
**29. b.** Commencer par le cas $A$ diagonale. **c.** Pour le signe des valeurs propres, exprimer $(CX|AX)$ en fonction de ${}^tXBX = (X|BX)$ pour une colonne propre $X$. **d.** Pour la réciproque, on trouve facilement un contre-exemple en dimension 2, avec $A$ diagonale et $B$ non diagonale.
**30.** Il s'agit de deux manières de compter le nombre de couples $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant une propriété à préciser, propriété qui devient claire si l'on revient à la définition de la partie entière.
**31.** En supposant $\sqrt{2}f(0) > 1$, commencer par prouver que $f$ ne s'annule pas (par exemple en examinant le premier point $x > 0$ tel que $f(x) = f(0)$) ; puis intégrer la relation $f'/f^3 \geqslant 1$.
**32.** Effectuer une intégration par parties sur $\int_0^x tf'(t)\,dt$ (en la justifiant proprement), puis faire un $\mathrm{DL}_1$ de chaque terme.
**33. a.** La fonction se prolonge par continuité au segment ; attention aux justifications dans les cas $x = k\pi$. **b.** Utiliser $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ ; bricoler le terme d'indice $n+1$ pour faire apparaître $(\cos t - \cos x)\cos(n+1)t$.
**34. a.** Utiliser Cauchy-Schwarz pour les intégrales. **b.** Prendre par exemple pour $f$ une fonction affine vérifiant $f(a) = \varepsilon$ et $f(b) = 1$, avec $\varepsilon \in\, ]0,1]$, pour montrer que $\varphi(E) = [1, +\infty[$.
**35.** Effectuer une intégration par parties sur $\int_x^{x+1} 1 \times f(t)\,dt$ en prenant la primitive de 1 qui s'annule en $x+1$ (voir exercice **48**).
**36. a.** Poser $F(x) = \int_0^x fg$, écrire une "inéquation différentielle" vérifiée par $F$, multiplier par le bon facteur pour faire apparaître une dérivée. **b.** En se plaçant sur $[0,1]$ par exemple pour majorer $g$, majorer le majorant en fonction de $M(x) = \sup\{f(t); t \in [0,x]\}$. On en déduit un premier segment $[0, b_0]$ sur lequel $f$ est nulle. Le terme $f(mx)$ est alors nul sur un segment un peu plus grand.
**37.** Dans tous les cas, le sup est atteint ; trouver le bon majorant, puis une matrice $M$ pour laquelle le majorant est atteint.
**38.** On a facilement **i.** entraîne les trois autres. Pour **ii.** $\Longrightarrow$ **i.** : supposer $u$ non continu et construire une suite d'éléments de $u^{-1}(S)$ qui converge vers $0_E$. Pour **iii.** $\Longrightarrow$ **i.** : même principe, avec une suite de $S$ dont l'image n'est pas bornée. Pour **iv.** $\Longrightarrow$ **i.** : **iv.** donne la continuité en $0_E$, qui suffit avec la linéarité.
**39. a.** Prendre une suite $(x_n)$ telle que $x_n \in L_n$ pour tout $n$ ; les valeurs d'adhérence sont dans l'intersection. **b.** Prendre $L_n(\varepsilon) = \big\{x \in K \mid f_n(x) - g(x) \geqslant \varepsilon\big\}$.
**40. a.** Montrer que, pour chercher l'inf des $\|f - q\|_\infty$ quand $q$ décrit $E_n$, on peut se limiter à une partie fermée bornée de $E_n$. **b.** En supposant $p \in E_n$ et $\|f - p\|_\infty < \|f - q\|_\infty$, obtenir une contradiction en étudiant les signes des $p(x_i) - q(x_i)$. **c.** Appliquer le **b.** avec pour $q$ les sommes partielles $S_n$ de la série : les extremums de $g - S_n$ sont faciles à repérer.
**41.** Prouver que la suite tend vers $+\infty$, étudier $x_{n+1}^2 - x_n^2$, utiliser la sommation des relations de comparaison.
**42. b.** Commencer par prouver que $u_n = O(2^{-n})$, puis poser $v_n = 2^n u_n$ et étudier $\ln(v_{n+1}/v_n)$. **c.** Reprendre $\ln(v_{n+1}/v_n)$ et utiliser la sommation des relations de comparaison.
**43.** En supposant $a^n + b^n + c^n \longrightarrow 0$, $|a| \geqslant |b| \geqslant |c|$ et $|a| \geqslant 1$, diviser par $a^n$ pour se ramener à $1 + \beta^n + \gamma^n \longrightarrow 0$. En utilisant la relation de récurrence vérifiée par $\beta^n + \gamma^n$, on arrive à une contradiction.
**44.** Sur $]0,1[$, $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum \dfrac{1}{X-k}$. **a.** L'existence vient de Rolle, l'unicité de la décroissance de $P'/P$. **b.** Montrer que la suite décroît en examinant $P_n'(x_{n-1})/P_n(x_{n-1}$. Encadrer ensuite $1/x_n$ à l'aide de sommes partielles de la série harmonique, en utilisant l'équation $P_n'(x_n)/P_n(x_n) = 0$.
**45.** Justifier la décroissance de la suite, puis encadrer l'intégrale et en déduire un encadrement de $a_n$.
**46.** Écrire $a_n$ sous forme d'une intégrale, et encadrer l'intégrale.
**47.** Dans $a_{2p} + a_{2p+1}$, faire un développement asymptotique de $\ln(2p+1)$, développer ensuite le cosinus correspondant par les formules de trigo usuelles, regrouper judicieusement les termes. Ne pas oublier que cela ne donne que la convergence des $S_{2p+1}$.
**48. a.** Intégration par parties. **b.** Noter que, dans la deuxième intégrale du **a**, $|n+1-t| \leqslant 1$ ; si $\int |f'|$ converge, $\int f$ et $\sum f(n)$ sont donc de même nature.
**49. b.** Dans le cas $a > 0$, appliquer la sommation des équivalences, en cherchant un équivalent télescopique ; on notera que c'est le terme $a^k$ qui est le principal responsables des variations de la suite, cela revient donc en

gros à chercher un équivalent télescopique de $a^k$. Pour $a<0$, séparer les termes pairs et les termes impairs, et justifier que l'on peut additionner les deux équivalents.
**50. b.** Faire un développement asymptotique de $\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)$.
**51.** Utiliser $\sum b_i^2 \leqslant (\sum b_i)^2$ si les $b_i$ sont positifs.
**52.** Encadrer $\sqrt{t}$ pour obtenir un équivalent de $I_n$, puis utiliser la sommation des équivalences pour obtenir un équivalent de $F(n)$. Montrer ensuite que $F(x)\sim F(\lfloor x\rfloor)$.
**53.** Pour la convergence : intégration par parties, en ajoutant le bon facteur pour primitiver le cos. Pour l'intégrabilité, changement de variable (virtuel) $u=\varphi(x)=x^4+x+1$ ; justifier que $\varphi^{-1}(u)\sim u^{1/4}$ en $+\infty$, et minorer l'intégrale sur $[\pi/2+n\pi, \pi/2+(n+1)\pi]$.
**54.** Poser $F(x)=\int_0^x e^{-s_0 t} f(t)\,dt$ ; il faut montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} F'(t)\,dt$ converge si $\lambda>0$.
**55.** Montrer que $\displaystyle\int_c^d \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\int_{ca}^{cb}\frac{e^{-u}}{u}\,du-\int_{da}^{db}\frac{e^{-u}}{u}\,du$, comparer la première à $\displaystyle\int_{ca}^{cb}\frac{1}{u}\,du$.
**56.** Commencer par montrer l'existence de $A$ tel que $|f(x)-f(1)|\leqslant A\sqrt{x-1}$ à l'aide de Cauchy-Schwarz. Effectuer une intégration par parties dans $\int_0^x \big(f(t)^2/t^2\big)\,dt$ ; en utilisant de nouveau Cauchy-Schwarz et en supposant que l'intégrale diverge, on obtient une contradiction en comparant les ordres de grandeur des deux membres.
**57. a.** Commencer par effectuer une intégration par parties dans $u_n-u_{n+2}$. **b.** Calculer $u_{2n}$ et utiliser Stirling ; la monotonie et la relation du **a** montrent que $u_{2n+1}\sim u_{2n}$. **c.** Dans l'intégrale finale, poser $t=\sin u$ après avoir fait apparaître un $dt/\sqrt{1-t^2}$.
**58. b.** Poser $u=nt$.
**59. a.** Si $a<b$, $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,dt=\lim_{x\to 0^+}\int_a^b \frac{e^{itx}-1}{x}f(t)\,dt.$
**60. b.** Montrer que $F$ est strictement monotone et déterminer ses limites en 0 et $+\infty$. Il faut déterminer le signe de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt$ ; poser $u=1/t$ dans l'intégrale sur $[1,+\infty[$, et comparer $u^2e^{1/u}$ à $e^u$ en passant aux logarithmes.
**61. a.** Poser $u=t^x$, en discutant suivant le signe de $x$. Pour $x\in\,]0,1]$, montrer qu'il existe $a>0$ tel que l'intégrale sur $[x,x+a]$ ne tende pas vers 0 en $+\infty$. Pour $x>1$, utiliser si nécessaire l'intégration par parties habituelle. **b.** Pour la continuité, utiliser si nécessaire l'intégration par parties pour se ramener à une intégrale absolument convergente. Pour l'équivalent, encore une fois,. . .
**62.** En utilisant la comparaison à une intégrale, on obtient un équivalent de la somme en $1^-$, de la forme $C/\ln x$.
**63. b.** Primitiver $f$.
**64. a.** Montrer que $\ln u_n(x)=-xH_n+C+o(1)$ quand $n$ tend vers $+\infty$, où $H_n$ est la somme partielle de rang $n$ de la série harmonique. **b.** Écrire $u_n(x)+\dfrac{x}{n}u_n(x)=u_{n-1}(x)$ et exprimer $u_n(x)/n$ en fonction de $u_{n-1}(x+1)$.
**65. b.** Utiliser le TSSA, et $2|ab|\leqslant a^2+b^2$. **c.** Pour la réciproque, noter que $S=T\circ f$ avec $T$ strictement croissante.
**66. a.** $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$. **b.** Utiliser le TSSA. **c.** Pour intervertir intégrale et somme, appliquer le théorème de convergence dominée aux sommes partielles.
**67.** Si $t>0$, étudier les $k$ suites extraites $(a_{n_0+pk}t^{n_0+pk})_{p\in\mathbb{N}}$ pour $n_0<k$, à l'aide du critère de d'Alembert pour les séries numériques.
**68.** Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par la somme.
**69.** Pour l'équivalent, commencer par donner une expression de $F(x)$ sous forme intégrale.
**70. a.** En encadrant les termes 2 à $n-1$ du produit, on encadre le module de l'intégrale par des factorielles. **b.** Le TSSA permet de justifier la convergence uniforme, donc l'interversion somme/intégrale. Reconnaître le développement en série entière de $(1+x)^t$.
**71. a.** Décomposer $1/i(n-i)$, puis son carré, en éléments simples. **b.** On trouve le carré de la fonction $F$ de l'exercice **69**, je ne vois rien de mieux à dire.
**72.** Déterminer une relation de récurrence vérifiée par les coefficients ; montrer qu'ils sont dans $[-1,1]$.
**73. a.** Majorer $|p_n(z)|$ par $p_n(-|z|)$. **b.** Étudier la série de terme général $p_n(z)-p_{n+1}(z)$. **c.** Pour la continuité, reprendre ce qui précède de manière à avoir la convergence uniforme sur un voisinage de 0. Montrer que les conditions établies en **b** déterminent $f$ une fois connu $f(0)$, et qu'il existe une série entière de rayon de convergence non nul dont la somme vérifie cette relation.
**74. a.** Écrire $f(x)$ comme un produit d'exponentielles. **b.** La fonction vérifie une équation différentielle simple, qui donne une relation entre les coefficients.

**75.** Le coefficient $a_0 = f(0)$ est nul par continuité ; diviser par $z$ et répéter.
**76. a.** $t^n = o(e^{x|t|})$ en $\pm\infty$ donne la convergence des intégrales $\int_{\mathbb{R}} t^n f(t)\,dt$. Appliquer ensuite la convergence dominée aux sommes partielles pour intervertir intégrale et somme. **b.** Calculer $L'$ et $L''$, et utiliser Cauchy-Schwarz pour étudier le signe de $(\ln L)''$.
**77. b.** Développer $\cos(xt)$ en série entière au voisinage de $x_0 t$, en majorant les coefficients sans chercher à en donner une expression très précise. **c.** Si $x_0$ est dans l'ouvert en question, le développement précédent est en fait valable sur $\mathbb{R}$, et a tous ses coefficients nuls. Pour la nullité de $f$, on retombe sur l'exercice classique $\big(\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^A t^k f(t)\,dt = 0\big) \Longrightarrow f = 0$, qui se résout à l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass.
**78. b.** Il faut déjà que les solutions de l'équation homogène soient bornées. Pour étudier le caractère borné de $y_1$, comparer la fonction sous l'intégrale à la dérivée de $e^{-x^{\alpha+1}/(\alpha+1)}$ et utiliser l'intégration des relations de comparaison.
**79. a.** Noter que $y''$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. **b.** En supposant trouvées deux solutions indépendantes bornées, étudier leur wronskien ; on notera qu'il est constant.
**80.** On a trois points critiques, $(0,0)$ et deux points symétriques par rapport à l'origine, pour des raisons que l'on aura intérêt à préciser. Montrer que l'on n'a pas d'extremum en $(0,0)$, en étudiant $f$ le long de droites bien choisies. Montrer que $f$ admet un minimum global, en montrant par exemple qu'il existe $M$ tel tel que $f(x,y) > f(0,0)$ en dehors de $[-M,M]^2$.
**81.** Utiliser les formules de factorisation ; on obtient le disque fermé $D'(0,2)$.
**82. a.** Noter que, en restreignant $\varphi$ à la sphère unité $S = \{x \in E \,|\, \|x\| = 1\}$, $\varphi(S)$ contient en fait toutes les valeurs prises par $\varphi$. **b.** Utiliser $\operatorname{grad}(f/g) = \big(g \operatorname{grad}(f) - f \operatorname{grad}(g)\big)/g^2$. Pour calculer le gradient de $x \longmapsto \big(u(x) \,|\, x\big)$, noter que $\big(u(h) \,|\, x\big) = \big(h \,|\, u^{-1}(x)\big)$. **d.** Décomposer un vecteur unitaire $x$ suivant les différents sous-espaces orthogonaux de la décomposition associée à la forme réduite.
**84. b.** Il suffit de montrer que $u \longmapsto \dfrac{\ln(1-u)}{u}$ se prolonge en 0 en une fonction $C^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.
**85.** Commencer par dénombrer les permutations $\sigma$ vérifiant $\sigma(k) = k$, pour $k$ fixé dans $[\![1,n]\!]$. Poser $f(\sigma,k) = 1$ si $\sigma(k) = k$, 0 sinon, et sommer les $f(\sigma,k)$ de deux manières différentes.
**86. a.** Pour dénombre les couples tels que $I = k$, commencer par compter les couples pour lesquels $A$ a pour cardinal $j$, $j$ fixé dans $[\![k,n]\!]$. **b.** Pour $V(I)$, utiliser $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, et son extension à $k(k-1)\binom{n}{k}$. Pour $V(U)$, passer aux complémentaires.
**87. a.** $Y$ est une somme de variables de Bernoulli. **b.** On doit minimiser $\sum p_i^2$, connaissant $\sum p_i$ ; penser à Cauchy-Schwarz.
**88.** On a $G_S = G_X G_Y$.
**89. a.** On a $\sum_{k=n}^{+\infty} kP(X = k) \geqslant nP(X \geqslant n)$. S'inspirer du **a**, en posant $A_x = \{a \in X(\Omega) \,|\, a \geqslant x\}$. Pour montrer que $\sum_{a \in A_x} aP(X = a)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$, on peut par exemple utiliser le fait que $E(X)$ est le sup des sommes finies de termes $aP(X = a)$.
**90.** Commencer par calculer $P(X \geqslant k)$.
**92.** Penser à $E(ZT)^2 \leqslant E(Z^2)E(T^2)$.
**93.** Utiliser les fonctions génératrices ; si $X+Y$ suit une loi de Poisson, commencer par montrer que $Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
**94.** Dans les deux questions, pour justifier la convergence de la série des intégrales, on peut majorer ses sommes partielles par l'intégrale de la fonction somme.
**95.** La limite est le sup $A$ des $f(x)$, pour $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$. Pour $\varepsilon > 0$, minorer $M_n^{1/n}$ en ne gardant qu'un terme dans la somme, pour lequel $f(x) \geqslant A - \varepsilon/2$.
**96. a.** Couper la somme donnant l'espérance en $\sum_1^a + \sum_{a+1}^n$, et noter que, si $R_n > a$, alors l'un au moins des $X_i$ est $\geqslant a$. **b.** Prendre $a = \sqrt{n}$. **c.** Penser à Markov.
**97. a.** Pour la majoration, comparer les développements en série entière. **b.** Pour la première inégalité, appliquer Markov à la bonne variable. Chercher ensuite le $t$ optimal.
**98. b.** $M_X(t)$ est en fait la somme d'une série entière sur $]-a,a[$. Dans l'expression de l'espérance, développer les $e^{tx}$ en série entière, et montrer que l'on peut intervertir les sommes, en majorant $e^{|tx|}$ par $e^{tx} + e^{-tx}$.