

1. CC INP – Monsieur Balas

Banque

Exercice 20 ?

Exercice

Soit $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$.

1. Montrer que S est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que S est décroissante.
3. Déterminer les limites de S en 0 et $+\infty$.

Corrigé

1. En posant $f_n : t \mapsto \frac{(-1)^n}{n+t}$:
 - la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ par le TSSA ;
 - chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'_n : t \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}$;
 - sur chaque segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum f'_n$ converge normalement (majorer $|f'_n(t)|$ par $1/(n+a)^2$) donc uniformément.
 Par suite, S est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

2. Pour $t > 0$, la série $S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t)$ vérifie aussi les hypothèses du TSSA, la somme est donc du signe du premier terme, donc négative.

Si nécessaire, il est facile de le redémontrer en regroupant les termes 2 par 2 : les groupements sont tous négatifs.

3. Le TSSA permet comme d'habitude de majorer pour tout n le nombre $|R_n(t)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)|$ par $|f_{n+1}(t)|$, puis par $1/(n+1)$, ce qui prouve la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut donc appliquer le théorème d'interversion somme/limite en $+\infty$: S y a pour limite 0.

En 0^+ , la fonction f_0 n'a pas une limite finie. On applique donc le théorème à $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = S - f_0$:

on obtient que $S - f_0$ a pour limite $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$. La fonction f_0 tend elle vers $+\infty$, donc $S = f_0 + (S - f_0)$ a pour limite $+\infty$.

On peut même donner le développement $S(t) = \frac{1}{t} - \ln 2 + o(1)$ au voisinage de 0. Notez d'autre part que la valeur de la limite de $S - f_0$ n'est pas utile pour avoir la limite de S , il suffit de dire que cette limite est finie.

2. CC INP – Monsieur Mion

Banque

Exercice ?

Exercice

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe la fonction $F_f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt$.

1. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-|x|}$. Montrer que F_g est bien définie, et calculer $F_g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Si f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que F_f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose de plus qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n f(t)| dt$ converge.
Pour tout entier k , soit $h_k : t \mapsto (-it)^k f(t)$.

- a. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, F_{h_k} est définie sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, F_f admet une dérivée d'ordre k et que $F_f^{(k)} = F_{h_k}$.

Corrigé

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g_x : t \mapsto e^{-|t|}e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et, puisque $|g_x(t)| = e^{-|t|}$, est négligeable devant $1/t^2$ en $-\infty$ et $+\infty$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence de $F_g(x)$. Un calcul immédiat donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-ix)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(1+ix)t} dt = \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{1+x^2}$$

2. Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$: $|f(t)e^{-ixt}| \leq |f(t)|$ et f est intégrable, d'où l'existence de F_f . La continuité de F_f (non demandée) est à peine plus chère (de nouveau domination par $|f|$).
3. a. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour $t \leq -1$ ou $t \geq 1$, on a $|(-it)^k f(t)| = |t^k f(t)| \leq |t^n f(t)|$. Par comparaison, h_k est intégrable sur $] -\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$, donc l'est sur $\mathbb{R}$.
- b. Pour l'hérédité, il suffit d'appliquer le théorème de dérivation à la fonction F_{h_k} , en dominant $h_{k+1}(t)e^{-ixt}$ par $|t^n f(t)|$ par exemple.
 Noter que le théorème sur les dérivées successives des intégrales à paramètre permettrait de se dispenser de la récurrence, mais l'énoncé semble l'interdire.

3. Centrale 1 – M. Lourdelet

La première partie consistait à démontrer le théorème de Cayley-Hamilton par la méthode que je vous ai donnée dans le poly correspondant. M. Lourdelet n'a malheureusement pas noté la suite.

4. IMT – M. Misme

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions f_n et g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = nx e^{-nx^2} \quad \text{et} \quad g_n(x) = nx \cos(nx) e^{-nx^2}$$

1. Étudier la convergence simple des suites (f_n) et (g_n) sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour chaque suite, a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$? sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$?

Corrigé

1. La suite $(f_n(0))$ est constante nulle, et, pour $x > 0$, la suite $(f_n(x))$ tend vers 0 par croissances comparées. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
 Puisque $|g_n(x)| \leq f_n(x)$ pour tout (n, x) , il en est de même pour la suite (g_n) .
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, une étude rapide des variations de f_n montre qu'elle atteint un maximum en $x_n = 1/\sqrt{2n}$, et tend vers 0 en 0 et $+\infty$. On a donc $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n) = e^{-1/2} \sqrt{\frac{n}{2}}$, qui n'a évidemment pas 0 pour limite : la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

D'autre part, pour tout $n \geq 1$, $\|g_n\|_\infty \geq |g_n(x_n)| = e^{-1/2} \sqrt{\frac{n}{2}} \left| \cos \sqrt{\frac{n}{2}} \right|$; en particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|g_{2p^2}\|_\infty \geq e^{-1/2} p |\cos p|$.

Classiquement, la suite $(\cos p)$ ne tend pas vers 0 (si c'était le cas, $\cos(2p) = 2\cos^2 p - 1$ tendrait vers -1 alors que c'est une suite extraite), donc $\|g_n\|_\infty$ ne tend pas non plus vers 0 : la convergence de (g_n) n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $a > 0$; à partir d'un rang n_0 , on a $a \geq 1/\sqrt{2n}$, et donc f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. On a donc

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [a, +\infty[\quad 0 \leq f_n(x) \leq f_n(a)$$

Puisque $f_n(a)$ tend vers 0, on a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ de (f_n) ; ainsi que de (g_n) , puisque $|g_n(x)| \leq f_n(x)$.

Exercice 2

Soit $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$. Nature géométrique des endomorphismes associés ?

Corrigé

On vérifie que les colonnes sont unitaires, et 2 à 2 orthogonales : la matrice est orthogonale.

Elle est de plus symétrique (réelle bien entendu), donc diagonalisable.

Les seules valeurs propres possibles pour une matrice orthogonale sont -1 et 1 . Puisque $\text{tr } A = 1$, A est donc semblable à $\text{diag}(1, 1, -1)$; dans une base orthonormée d'un espace euclidien, elle représente donc une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

5. CC INP – M. Vilatte

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent tous b , les autres valant 1 ; soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 .

1. Les matrices A et J sont-elles diagonalisables ?
2. Déterminer les éléments propres de la matrice J .
3. Calculer le déterminant de A .

Corrigé

1. Les matrices A et J sont symétriques réelles donc diagonalisables.
2. La matrice J est clairement de rang 1 ; 0 est donc valeur propre, et le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$. Un calcul immédiat montre que c'est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.
On a $\text{tr } J = n$ = somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité. Puisque 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$ (exactement puisque J est diagonalisable), la dernière valeur propre est n ; le sous-espace propre associé est la droite engendrée par le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 (et on vérifie que les sous-espaces propres sont orthogonaux).
3. Posons $D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$; il existe P inversible telle que $J = PDP^{-1}$.
D'autre part, $A = J + (b - 1)I_n = PDP^{-1} + (b - 1)PP^{-1} = P(D + (b - 1)I_n)P^{-1}$. La matrice A est donc semblable à $D + (b - 1)I_n$, donc $\det A = \det(D + (b - 1)I_n) = (n + b - 1)(b - 1)^{n-1}$.

6. CC INP – M. Souchaud

Soit E le sous-espace de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto e^x$.

1. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
2. Déterminer une base orthonormale de $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$.
3. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la distance de f_2 à $x \mapsto ax + b$ soit minimale.

Corrigé

1. Voir le cours.
2. On commence par chercher une base orthogonale (g_0, g_1) . Pour cela, on prend $g_0 = f_0$ et on cherche g_1 sous la forme $f_1 + \lambda g_0$, en choisissant λ de manière à avoir $(g_0|g_1) = 0$.
On trouve facilement $\lambda = -1/2$, c'est-à-dire $g_1(x) = x - 1/2$ pour tout x .
Il ne reste qu'à normaliser les vecteurs de la base ; on trouve que $(h_0, h_1) = (g_0, 12g_1)$ est une base orthonormée de F .
3. On cherche en fait le vecteur de F le plus proche de f_2 ; on sait qu'il s'agit de son projeté orthogonal sur F , et que celui-ci est donné par $h = (h_0|f_2)h_0 + (h_1|f_2)h_1$. Il ne reste qu'à faire les calculs.

7. CC INP – M. Misme

Banque

Exercice 18.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.
2. a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice

$$\text{dans } \mathcal{B} \text{ de } u \text{ soit } A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b. Résoudre l'équation $X^2 = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corrigé

1. C'est du cours : puisque u est nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que X^p annule u . Le polynôme minimal de u divise donc X^p , donc est de la forme X^k . Mais le polynôme minimal divise aussi le polynôme caractéristique, donc $k \leq \deg \chi_u = n$, et par suite $X^n = X^k X^{n-k}$ annule u .
2. a. Difficile de faire plus classique. On choisit x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. On montre que la famille $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre, en transformant une combinaison linéaire nulle par $u, u^2, \dots, u^{n-1}$, et en notant que tous les termes de la forme $u^k(x_0)$ avec $k \geq n$ sont nuls. La famille $\mathcal{B}$ est alors une base de E , dans laquelle la matrice de u est A .
- b. Si l'équation a une solution X , c'est la matrice dans $\mathcal{B}$ d'un endomorphisme v vérifiant $v^2 = u$. On a alors $v^{2n} = u^n = 0$, donc, par la question 1, $v^n = 0$. Mais $v^{2n-2} = u^{n-1} \neq 0$, alors que $2n-2 \geq n$ si $n \geq 2$; on a donc une contradiction dans ce cas, et donc l'équation n'a pas de solution. Si $n = 1$, le seul endomorphisme nilpotent est l'endomorphisme nul, le problème devient sans intérêt.

8. CC INP – M. Levy

Banque

Exercice ?

Exercice

Soient $p \in]0, 1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de

Bernoulli de paramètre p . Soient $S = \sum_{k=1}^n X_k$, $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^t U$.

1. a. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer la loi de probabilité de X_k^2 .
b. Calculer ${}^t U U$ en fonction de S .
c. Calculer M^2 en fonction de M et S . Donner un polynôme annulateur de M .
La matrice M est-elle diagonalisable? Que peut-on dire de son spectre?
2. a. Déterminer les coefficients de M .
b. Déterminer la loi de $\text{tr}(M)$, donner son espérance et sa variance.
c. Donner les valeurs possibles de $\text{rg}(M)$. Donner sa loi de probabilité.
3. Donner la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes.

Corrigé

1. **a.** Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque X_k ne prend que les valeurs 0 et 1, on a $X_k^2 = X_k$ dans tous les cas ; donc X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p .
- b.** On a ${}^tUU = \sum_{k=1}^n X_k^2 = \sum_{k=1}^n X_k = S$ d'après la question précédente.
- c.** On a $M^2 = U({}^tUU)U = SU^tU = SM$; le polynôme $P_0 = X^2 - SX = X(X - S)$ est donc un polynôme annulateur de M .
Si $S \neq 0$, P_0 est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable ; son spectre est inclus dans l'ensemble des racines de P_0 , donc les seules valeurs propres possibles sont 0 et S .
Si $S = 0$, les valeurs propres de M sont racines de $P_0 = X^2$, donc seul 0 est valeur propre. Classiquement, M est alors diagonalisable si et seulement si c'est la matrice nulle.
2. **a.** Avec des notations évidentes, $M_{ij} = X_i X_j$ pour tout (i, j) .
- b.** En particulier, $\text{tr } M = \sum_{i=1}^n X_i^2 = S$ (question 1.b). Puisque S est la somme de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p , S suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$. En particulier, $E(\text{tr } M) = E(S) = np$ et $V(\text{tr } M) = V(S) = np(1 - p)$.
- c.** Les colonnes de M sont toutes colinéaires à U (la colonne j vaut $X_j U$), donc son rang vaut 0 ou 1. Il ne vaut 0 que si M est nulle, donc que si $X_i = 0$ pour tout i (voir les coefficients diagonaux). Par indépendance des X_k , $P(\text{rg } M = 0) = \prod_{k=1}^n P(X_k = 0) = (1 - p)^n$.
La variable $\text{rg } M$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.
3. Puisque $\text{rg } M \leq 1$, 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$. La dernière valeur propre est donnée par la trace de M , c'est donc S ; par suite, on cherche la probabilité d'avoir $S \neq 0$.
Or, $S = 0 \iff \forall k \quad X_k = 0$; comme précédemment, on a donc $P(S = 0) = (1 - p)^n$. La probabilité demandée est donc $1 - (1 - p)^n$.

9. CC INP – M. Robinot

Banque

Exercice ?

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que A soit diagonalisable.
2. La diagonaliser dans ce cas.

Corrigé

1. La matrice A admet 1 et -1 comme valeurs propres, toutes deux de multiplicité 2. Elle est donc diagonalisable si et seulement si les sous-espaces propres associés sont de dimension 2.
Dans chaque cas, la dimension du sous-espace propre associé à λ est la dimension du noyau de $A - \lambda I_4$, qui vaut $4 - \text{rg}(A - \lambda I_4)$; on veut donc que les matrices $A - I_4$ et $A + I_4$ soient de rang 2.
On a $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & -2 & f \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Si $a \neq 0$, les colonnes 2, 3 et 4 sont clairement indépendantes, et le rang est au moins 3. Si $a = 0$, les colonnes 1 et 2 sont nulles, et 3 et 4 sont indépendantes, donc le rang vaut 2. Finalement, $\text{rg}(A - I_4) = 2 \iff a = 0$.
On a $A + I_4 = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En refaisant le raisonnement précédent sur les lignes, on a de même $\text{rg}(A + I_4) = 2 \iff f = 0$.

Finalement, A est diagonalisable si et seulement si $a = f = 0$.

2. On suppose donc $a = f = 0$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$; soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

De manière immédiate, e_1 et e_2 sont vecteurs propres pour la valeur propre 1. D'autre part, si $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$, on obtient sans difficulté $f(u) = -u \iff x = -(bz + ct)/2$ et $y = -(dz + et)/2$. Le sous-espace propre associé à -1 est donc engendré par $u_3 = (b, d, -2, 0)$ et $u_4 = (c, e, 0, -2)$.

Finalement, avec $D = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C} = (e_1, e_2, u_3, u_4)$), on a $P^{-1}AP = D$.

10. CC INP – Mlle Maakni

Banque

Exercice ?

Exercice

Si f est une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$.

Pour tout réel α , on note E_α l'espace des fonctions f continues de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, telles qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \geq 0 \quad |f(t)| \leq Ke^{\alpha t}$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in E_\alpha$; soit $F = \mathcal{L}(f)$.
 - a. Montrer que F est définie sur $]\alpha, +\infty[$.
 - b. Montrer que F est de classe C^∞ sur $]\alpha, +\infty[$, et déterminer $F^{(n)}$ pour tout n .
 - c. On suppose que f est de classe C^1 , et que $f' \in E_\alpha$. Déterminer une relation entre $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(f')$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : t \mapsto t^n e^{\alpha t}$.
Calculer $\mathcal{L}(f_0)$, puis $\mathcal{L}(f_n)$ pour tout n .
3. Soit f solution du problème de Cauchy $y' + y = te^t$, $y(0) = 0$. On admet que f et f' sont dans E_1 ; on pose $Y = \mathcal{L}(f)$.
 - a. Sans chercher à résoudre l'équation différentielle, déterminer Y .
 - b. Déterminer un antécédent de Y par $\mathcal{L}$.

Corrigé

1. a. Soit K vérifiant $|f(t)| \leq Ke^{\alpha t}$ pour tout t . Soit $x > \alpha$. On a alors $|f(t)e^{-xt}| \leq Ke^{(\alpha-x)t}$ pour tout $t \geq 0$, et la fonction majorante est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque $\alpha - x < 0$. Par suite, $F(x)$ est bien défini.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale, version dérivées successives. Notons g la fonction $(x, t) \mapsto f(t)e^{-xt}$.
 - Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, g admet une dérivée partielle k -ième par rapport à x , qui est $(x, t) \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$.
 - Soient $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $x > \alpha$. La fonction $t \mapsto \partial^k g / \partial x^k(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, et majorée en module par $t^k e^{(\alpha-x)t}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car clairement négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$; donc $t \mapsto \partial^k g / \partial x^k(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
 - Soit $[\beta, \gamma] \subset]\alpha, +\infty[$. Pour tout $x \in [\beta, \gamma]$ et tout $t \geq 0$, on a $|\partial^n g / \partial x^n(x, t)| \leq t^n |f(t)| e^{(\alpha-\beta)t} = \varphi(t)$; et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour les mêmes raisons que précédemment.
 On peut donc affirmer que F est de classe C^n sur $]\alpha, +\infty[$, et ce pour tout n , donc est de classe C^∞ . On a de plus $F^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > \alpha$.

c. Soit $x > \alpha$. On effectue une intégration par parties dans $\mathcal{L}(f')(x)$, en primitivant f' . On obtient

$$\mathcal{L}(f')(x) = [f(t)e^{-xt}]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xf(t)e^{-xt} dt$$

Puisque $f \in E_\alpha$, on voit facilement que la fonction dans le crochet a pour limite 0 en $+\infty$. Finalement, $\mathcal{L}(f')(x) = -f(0) + x\mathcal{L}(f)(x)$.

2. Notons que, pour $n \geq 1$, les fonction f_n ne sont pas dans E_α , mais sont dans E_β pour tout $\beta > \alpha$. Les fonctions $\mathcal{L}(f_n)$ sont donc définies sur $] \beta, +\infty[$ pour tout $\beta > \alpha$, donc sur $] \alpha, +\infty[$.

Soit $x > \alpha$. On a $\mathcal{L}(f_0)(x) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-x)t} dt = \frac{1}{x-\alpha}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1.b, puisque $f_n(t) = t^n f_0(t)$ pour tout t , la fonction $\mathcal{L}(f_n)$ est la dérivée n -ième de $\mathcal{L}(f_0)$, multipliée par $(-1)^n$. On a donc $\mathcal{L}(f_n)(x) = \frac{n!}{(x-\alpha)^{n+1}}$.

3. a. L'application $g \mapsto \mathcal{L}(g)$ est clairement linéaire. On a donc, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\mathcal{L}(f' + f)(x) = \mathcal{L}(f')(x) + \mathcal{L}(f)(x) = (x+1)Y(x)$ d'après 1.c, puisque $f(0) = 0$.

D'autre part, le second membre de l'équation est la fonction f_1 de la question 2, dans le cas $\alpha = 1$; son image par $\mathcal{L}$ est donc la fonction $x \mapsto 1/(x-1)^2$.

On a donc finalement $\forall x > 1 \quad Y(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)^2}$.

b. On décompose Y en éléments simples : il existe a, b, c réels tels que $Y = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$.

On a $a = [(X+1)Y](-1) = 1/4$ et $c = [(X-1)^2 Y](1) = 1/2$; puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} xY(x) = 0 = a+b$, d'où $b = -1/4$. Finalement, $Y = \frac{1}{4(X+1)} - \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{2(X-1)^2}$.

D'après la question 2 et par linéarité de $\mathcal{L}$, la fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^t}{4} + \frac{te^t}{2}$ vérifie $\mathcal{L}(g) = Y$.

On vérifie sans difficulté que c'est la solution f du problème de Cauchy initial.

11. CC INP – M. Masson

Banque

Exercice ?

Exercice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

- Déterminer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de A .
- Déterminer le polynôme minimal de f .
- Rappeler le lemme des noyaux. En déduire deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ supplémentaires et stables par f .
On note F celui de dimension 1 et G celui de dimension 2.
- Soit (u_1) une base de F et (u_2, u_3) une base de G . On note d l'endomorphisme tel que $d(u_1) = -u_1$, $d(u_2) = u_2$ et $d(u_3) = u_3$.
 - Montrer que f et d commutent.
 - On pose $n = f - d$. Calculer n^2 et montrer que n est nilpotent. Montrer que n et d commutent.
 - Exprimer f^k pour $k \geq 1$ en fonction de n et d .

Corrigé

- En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient facilement $\chi_A = (X - 1)^2(X + 1)$. Après calculs, le sous-espace propre pour la valeur propre 1 est la droite $\text{Vect}(0, 0, 1)$, et le sous-espace propre pour la valeur propre -1 est la droite $\text{Vect}(2, 0, -1)$.
- Le polynôme minimal π_f est unitaire. Il annule f , donc les valeurs propres de f sont racines de π_f ; donc π_f est multiple de $(X - 1)(X + 1)$. Enfin, il divise χ_f : ce ne peut donc être que $(X - 1)(X + 1)$ ou $(X - 1)^2(X + 1)$.
 Dans le premier cas, π_f serait un polynôme annulateur de f scindé à racines simples, donc f serait diagonalisable; ce n'est pas le cas, puisque la dimension du sous-espace propre pour 1 est strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre 1.
 Finalement, $\pi_f = \chi_f = (X - 1)^2(X + 1)$.
- Le lemme des noyaux affirme que, si $g \in \mathcal{L}(E)$, et si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, alors $\text{Ker}[PQ](g) = \text{Ker } P(g) \oplus \text{Ker } Q(g)$.
 Ici, en prenant $P = (X - 1)^2$ et $Q = X + 1$, on a bien $P \wedge Q = 1$. De plus, $PQ = \chi_f$, donc $[PQ](f) = 0$. Finalement, $E = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Ker } Q(f) = \text{Ker}(f - \text{Id})^2 \oplus \text{Ker}(f + \text{Id})$.
 Enfin, f commute avec $P(f)$ et $Q(f)$, donc leurs noyaux sont stables par f .
 On a vu en 1 que $\dim \text{Ker}(f + \text{Id}) = 1$, donc $F = \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $G = \text{Ker}(f - \text{Id})^2$.
- Sur chacun des deux sous-espaces, d réalise une homothétie (de rapport -1 sur F , 1 sur G), donc commute avec l'endomorphisme induit par f .
 On a donc $[d \circ f](x) = [f \circ d](x)$ pour tout vecteur x appartenant à F ou à G ; puisque $E = F \oplus G$, on a bien $d \circ f = f \circ d$.
 - Pour $x \in F$, on a clairement $d(x) = -x$; donc $[f - d](x) = f(x) + x = 0$ par définition de F . A fortiori, $[f - d]^2(x) = 0$.
 Pour $x \in G$, $d(x) = x$, donc $[f - d](x) = [f - \text{Id}](x)$. Puisque G est stable par f , on a alors $[f - d]^2(x) = [f - \text{Id}]^2(x) = 0$ par définition de G .
 Puisque $n^2 = [f - d]^2$ est nul sur F et G , il est nul sur E , et donc n est nilpotent. Enfin, d commute avec f et d , donc commute avec $f - d = n$.
 - Soit $k \geq 1$. On a $f^k = (d + n)^k$. Puisque d et n commutent, on peut appliquer la formule du binôme; en tenant compte du fait que $n^j = 0$ pour $j \geq 2$, on a donc $f^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} n^j \circ d^{k-j} = d^k + kn \circ d^{k-1}$.

12. IMT – M. Nguyen

Question de cours

Définition d'une loi géométrique; déterminer la fonction génératrice, l'espérance, etc.

Exercice

On considère la suite de terme général $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

- Étudier la convergence de la suite (u_n) .
- Montrer l'existence de $c > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n}$.
- Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$?
- Étudier la convergence pour $x = R$ et pour $x = -R$.

Corrigé

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto e^{-t^n}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$; de manière immédiate, $e^{-t^n} = o(1/t^2)$ en $+\infty$, donc l'intégrale définissant u_n est bien convergente.
 Pour la limite, on applique le théorème de convergence dominée, en interprétant u_n comme une intégrale sur $]1, +\infty[$ pour simplifier. Pour tout $t > 1$, e^{-t^n} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; et, pour tout

$n \geq 1$, $0 \leq e^{-t^n} \leq e^{-t} = \varphi(t)$, où φ est continue et intégrable sur $]1, +\infty[$ (cas $n = 1$). Par suite, u_n a pour limite $\int_1^{+\infty} 0 \cdot dt = 0$.

2. On effectue dans u_n le changement de variable $u = t^n$ (autorisé puisque $t \mapsto t^n$ est une bijection de classe C^1 de $]1, +\infty[$ dans lui-même). On obtient $u_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n} du$.

Pour tout $u > 1$, le facteur $u^{1/n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, et est dominé par u . Une nouvelle application du théorème de convergence dominée, en prenant ici $\varphi(u) = e^{-u}$, montre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Enfin, le nombre c est l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur $]1, +\infty[$, donc $c > 0$.

On peut donc bien conclure que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n}$.

3. En utilisant l'équivalent précédent, la règle de d'Alembert fournit immédiatement $R = 1$.
4. Pour $x = R = 1$, on a $u_n x^n \sim c/n > 0$, et la série $\sum (c/n)$ diverge, donc $\sum u_n x^n$ diverge.
- Pour $x = -R = -1$, $u_n x^n = (-1)^n u_n$ pour tout n . Or, pour tout $n \geq 1$ et tout $t > 1$, $e^{-t^{n+1}} \leq e^{-t^n}$, donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante de limite 0 (question 1), donc la série $\sum (-1)^n u_n$ converge grâce au théorème sur les séries alternées.

13. IMT – M. Balas

Question de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Soit $X : t \mapsto X(t)$ une solution sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $(\Sigma) : X' = AX$.

- On suppose que $X(0) = V$ est un vecteur propre de A pour une valeur propre λ . Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{\lambda t} V$.
- On suppose maintenant $X(0) = X_0$ quelconque. Donner une expression de $X(t)$ pour tout t .

Corrigé

- On vérifie immédiatement que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t} V$ est solution du problème de Cauchy $X' = AX$, $X(0) = V$. L'unicité de cette solution donne alors le résultat.
- On décompose X_0 sous la forme $X_0 = \sum_{i=1}^p V_i$, où chaque V_i est vecteur propre pour une valeur propre λ_i . On montre alors comme précédemment que $X(t) = \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} V_i$ pour tout t .

Exercice

Soit X et Y deux variables indépendantes sur un même univers, suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = \frac{X}{Y}$.

- Calculer $E(U)$.
- Donner la loi de U .
- Montrer que $E(U) > 1$; commenter.

Corrigé

- Les variables X et $1/Y$ sont indépendantes, donc $E(U) = E(X)E(1/Y)$.
On sait que $E(X) = 1/p$. D'autre part, en posant $q = 1 - p$, on a par la formule de transfert :

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{pq^{k-1}}{k} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\frac{p}{q} \ln(1 - q) = \frac{-p}{1 - p} \ln p$$

Finalement, $E(U) = \frac{\ln p}{p - 1}$.

2. Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $U(\Omega) = \mathbb{Q}_+^*$.

Soit $r > 0$ rationnel ; soit a/b la forme irréductible de r . On a alors $U = X/Y = a/b$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad X = ka$ et $Y = kb$, donc $[U = r] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ([X = ka] \cap [Y = kb])$. Puisque l'union est disjointe et que X et Y sont indépendants, on a finalement

$$P(U = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka)P(Y = kb) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{k(a+b)-2} = \frac{p^2}{q^2} \frac{q^{a+b}}{1 - q^{a+b}}$$

3. Les accroissements finis donnent l'existence de $c \in]p, 1[$ tel que $E(U) = \frac{\ln p - \ln 1}{p - 1} = \frac{1}{c}$; on a donc bien $E(U) > 1$.

Techniquement, cela s'explique par le fait que l'on peut grouper les valeurs prises par U deux par deux, en regroupant chaque valeur et son inverse, les deux ayant la même probabilité ; et la moyenne de ces deux valeurs, $\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$, est toujours supérieure à 1, strictement si $r \neq 1$.

On peut aussi noter que cela prouve que $E(X/Y) \neq E(X)/E(Y)$, malgré l'indépendance.

14. CC INP – M. Mahamodraza

Banque

Exercice 53.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note O_n l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et E_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives, c'est-à-dire des matrices A symétriques vérifiant ${}^tXAX > 0$ pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle.

Soit $A \in E_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.
3. Montrer qu'il existe $B \in E_n$ telle que $B^2 = A$.
4. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe $H \in E_n$ telle que ${}^tCC = H^2$; H est-elle inversible ?
5. Montrer qu'il existe $U \in O_n$ et $V \in E_n$ telles que $C = UV$.

Corrigé

1. Puisque A est symétrique réelle, on sait plus précisément qu'il existe $P \in O_n$ telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.
2. Soit λ une valeur propre de A , soit V une colonne propre associée. Alors ${}^tVAV = \lambda {}^tVV = \lambda \|V\|^2$ en utilisant la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.
Puisque $V \neq 0$, on a $\lambda = {}^tVAV/\|V\|^2 > 0$.
3. Soient donc $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in O_n$ telles que ${}^tPAP = D$. Les λ_i sont strictement positifs par la question 2, on peut donc poser $D_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, et on a clairement $D_1^2 = D$.
Posons $B = PD_1 {}^tP$. Alors :
 - $B^2 = P(D_1^2) {}^tP = PD {}^tP = A$;
 - on a immédiatement ${}^tB = B$;
 - si X est une colonne non nulle, alors ${}^tXBX = {}^t({}^tPX)D_1({}^tPX)$. Notons $y_1, \dots, y_n$ les composantes de la colonne tPX ; on a alors ${}^tXBX = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} y_i^2$. Puisque les λ_i sont strictement positifs et que l'un au moins des y_i est non nul ($X \neq 0$ et tP est inversible), on a bien ${}^tXBX > 0$.
Finalement, $B^2 = A$ et $B \in E_n$.
4. La matrice tCC est symétrique. De plus, pour toute colonne X non nulle, ${}^tX({}^tCC)X = {}^t(CX)(CX) = \|CX\|^2 > 0$ puisque C est inversible et $X \neq 0$, donc $C \in E_n$.
La question précédente montre qu'il existe $H \in E_n$ telle que ${}^tCC = H^2$. On a alors $(\det H)^2 = (\det {}^tC)(\det C) = (\det C)^2 \neq 0$, donc H est inversible.

5. Si un couple (U, V) est solution, on a ${}^tCC = {}^tV{}^tUU V = V^2$ puisque U est orthogonale et V symétrique. On commence donc par prendre V égale à la matrice H de la question précédente; on a alors $V \in E_n$ et $V^2 = {}^tCC$. On sait de plus que V est inversible.
On peut donc poser $U = CV^{-1}$, ce qui donne $C = UV$. On a alors ${}^tUU = {}^t(V^{-1})({}^tCC)V^{-1} = V^{-1}(V^2)V^{-1} = I_n$ puisque V^{-1} est symétrique. On a donc bien $U \in O_n$, ce qui achève la démonstration.

15. Mines – M. Lourdelet

Exercice 1 (préparation 15 mn)

Les 3 questions me paraissent indépendantes.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace E . On suppose qu'il existe un polynôme P tel que $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$ et $P(f) = 0$. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
3. Soient A et B inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si AB l'est.

Corrigé

1. Le polynôme $X^n - 1$ annule M et est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Par suite, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et ses valeurs propres sont des racines n -ièmes de l'unité. De plus, comme les coefficients de M sont réels, si l'une des valeurs propres n'est pas réelle, alors la deuxième est sa conjuguée.
La trace de M est un nombre entier, et est la somme des deux valeurs propres, qui sont de module 1; donc $\text{tr } M \in \llbracket -2, 2 \rrbracket$.
Si l'une des valeurs propres est réelle, alors l'autre aussi, et chacune des deux vaut 1 ou -1 .
Si les deux valeurs propres sont complexes, alors l'une est de la forme $e^{i\theta}$ et l'autre vaut alors $e^{-i\theta}$; dans ce cas, $\text{tr } M = 2 \cos \theta \in \{-1, 0, 1\}$ (les valeurs 2 et -2 donnent des valeurs propres réelles), donc θ vaut $2\pi/3$, $\pi/2$ ou $\pi/3$, ou l'opposé d'un de ces nombres, modulo 2π . Dans tous les cas, $12\theta = 0$ modulo 2π , donc les valeurs propres sont des racines douzièmes de 1.
Dans chaque cas, M est diagonalisable et chaque valeur propre λ vérifie $\lambda^{12} = 1$, donc $M^{12} = I_n$.
2. Puisque $P'(0) \neq 0$, le coefficient de X dans P est non nul; on peut donc décomposer P sous la forme $P = XQ$, où $Q(0) \neq 0$, et donc Q est premier avec X .
Le lemme des noyaux donne alors $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } Q(f)$; reste à montrer que $\text{Im } f = \text{Ker } Q(f)$.
Soit $x \in E$. On a $[Q(f)](f(x)) = [Q(f) \circ f](x) = [P(f)](x) = 0$, donc $f(x) \in \text{Ker } Q(f)$. Ceci étant vrai pour tout x , on a déjà $\text{Im } f \subset \text{Ker } Q(f)$.
Soit maintenant $x \in \text{Ker } Q(f)$. Posons $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Puisque $Q(0) \neq 0$, on sait que $a_0 \neq 0$. L'égalité $[Q(f)](x) = 0$ donne alors $x = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k f^k(x)$. Tous les vecteurs de la somme sont dans $\text{Im } f$ puisque $k \geq 1$, et donc $x \in \text{Im } f$, d'où $\text{Ker } Q(f) \subset \text{Im } f$, ce qui achève la démonstration.
3. Supposons dans un premier temps M diagonalisable. Alors, M^2 l'est aussi, et $M^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$. La forme de cette matrice montre que le sous-espace F engendré par les n premiers vecteurs de la base est stable par M^2 , et que AB est la matrice de l'endomorphisme induit dans cette base. Puisque M^2 est diagonalisable, on sait que l'endomorphisme induit l'est aussi, donc que AB est diagonalisable.
Supposons réciproquement AB diagonalisable. Puisque $BA = B(AB)B^{-1}$, BA est semblable à AB , donc est aussi diagonalisable. Par suite, M^2 est diagonalisable, et ses valeurs propres sont celles de AB et BA .
Posons $\text{Sp}(M^2) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Les λ_i sont valeurs propres de AB ou BA qui sont inversibles, donc les λ_i sont tous non nuls.
Le polynôme $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ annule M^2 , donc le polynôme $Q = \prod_{i=1}^p (X^2 - \lambda_i)$ annule M . Pour tout i , soit μ_i une racine carrée de λ_i ; on a alors $Q = \prod_{i=1}^p (X - \mu_i)(X + \mu_i)$.

Puisque les λ_i sont non nuls et deux à deux distincts, les nombres $\mu_1, \dots, \mu_p, -\mu_1, \dots, -\mu_p$ sont deux à deux distincts. Le polynôme Q est donc un polynôme scindé à racines simples qui annule M , donc M est diagonalisable, ce qui achève la démonstration.

Exercice 2 (sans préparation)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé

Sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est le rapport de deux polynômes en (x, y) , et le dénominateur ne s'annule pas sur U ; f est donc de classe C^∞ sur U .

Pour $(x, y) \in U$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$.

D'autre part, pour tout $x \neq 0$: $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0; de même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Enfin, en majorant en particulier $|x|$ et $|y|$ par $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, on vérifie sans difficulté que f et ses deux dérivées partielles sont continues en $(0, 0)$. Puisque f et ses deux dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$, f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

16. Centrale 2 – M. Perault

On effectue des lancers de pièces avec des pièces différentes à chaque lancer : P_k est la probabilité d'obtenir pile au k -ième lancer.

On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de piles durant les n premiers lancers, et π_n la probabilité que X_n soit pair.

1. [Python]

a. Écrire une fonction `pi(n, p)` qui prend en argument un entier n et une fonction p et qui renvoie une estimation de π_n (sur 1000 expériences).

b. Tracer π_n pour $P_n = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ et pour $P_n = \frac{1}{2(n+1)^{3/2}}$.

c. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on considère $P_n = \frac{1}{2(n+1)^\alpha}$. Tracer π_{100} pour $\alpha \in [0, 6]$.

2. a. Donner l'expression de π_n en fonction des P_k ; on pourra utiliser $U_n = \pi_n - (1/2)$.

Que se passe-t-il si une pièce est équilibrée? Interprétation?

b. Étudier le comportement de π_n en $+\infty$ pour $P_n = \frac{1}{2(n+1)}$ et $P_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$.

3. Questions non notées : voir le corrigé.

Corrigé

1. Voir M. Pompigne.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement " X_n est pair", et B_n l'événement "on obtient pile au n -ième lancer". Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} &= P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A_n})P(\overline{A_n}) \\ &= P(\overline{B_{n+1}})\pi_n + P(B_{n+1})(1 - \pi_n) \\ &= (1 - 2P_{n+1})\pi_n + P_{n+1} \end{aligned}$$

En posant $U_n = \pi_n - 1/2$, on a donc pour tout $n \geq 1$:

$$U_{n+1} = (1 - 2P_{n+1})(U_n + 1/2) + P_{n+1} - 1/2 = (1 - 2P_{n+1})U_n$$

On a donc, pour $n \geq 2$, $U_n = U_1 \prod_{k=2}^n (1 - 2P_k)$; puisque $\pi_1 = 1 - P_1$, on a finalement

$$\pi_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_1\right) \prod_{k=2}^n (1 - 2P_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n (1 - 2P_k)$$

Si la pièce n_0 est équilibrée, la formule montre que $\pi_n = 1/2$ à partir du rang n_0 . En effet, quel que soit le résultat des autres lancers, la probabilité pour que le lancer n_0 compense les autres est la même que la probabilité pour qu'il ne les compense pas. Plus proprement, pour $n \geq n_0$, en notant q_n la probabilité que le nombre de piles dans les autres lancers soit paire, on a $\pi_n = \frac{1}{2} \times q_n + \frac{1}{2} \times (1 - q_n) = \frac{1}{2}$ puisque les autres lancers sont indépendants du lancer n_0 .

b. Dans les deux cas, le produit $r_n = \prod_{k=1}^n (1 - 2P_k)$ se calcule facilement.

Dans le premier cas, pour $n \geq 2$, $r_n = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$, donc π_n tend vers $1/2$.

Dans le deuxième cas, pour $n \geq 2$, $r_n = \prod_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{n!(n+2)!}{2[(n+1)!]^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$, et donc π_n tend vers $3/4$.

3. Plus généralement, supposons que (P_n) tende vers 0. On a alors $1 - 2P_n > 0$ à partir d'un rang n_0 . Pour $n \geq n_0$, en posant $s_n = \prod_{k=n_0}^n (1 - 2P_k)$, on peut donc écrire

$$\ln(s_n) = \sum_{k=n_0}^n \ln(1 - 2P_k) \quad \text{et} \quad \ln(1 - 2P_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2P_n < 0$$

Si la série $\sum P_n$ diverge, alors la série $\sum \ln(1 - 2P_n)$ aussi; puisque ses termes sont négatifs, $\ln(s_n)$ tend vers $-\infty$, et donc $s_n = e^{\ln(s_n)}$ tend vers 0; par suite, $\pi_n = \frac{1}{2} + \frac{s_n}{2} \prod_{k=1}^{n_0-1} (1 - 2P_k)$ tend vers $1/2$.

Si $\sum P_n$ converge, alors la suite $(\ln r_n)$ aussi, et donc r_n a une limite strictement positive; (π_n) tend donc vers une limite distincte de $1/2$, plus grande ou plus petite suivant le signe de $\prod_{k=1}^{n_0-1} (1 - 2P_k)$.

Les questions manquantes devaient plus ou moins tourner autour de ça; on peut aussi montrer (en étudiant r_{n+1}/r_n) que, si π_n a une limite finie non nulle, alors P_n a bien pour limite 0.

17. Centrale 1 – M. Perault

1. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral, en donnant les grandes lignes de la démonstration.
2. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda x)$.
 - a. Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de $h^{(n)}$ pour tout n .
 - b. Montrer que h est développable en série entière au voisinage de 0.
3. Question non notée.

Corrigé

1. Si f est de classe C^{n+1} sur I et $(a, b) \in I^2$, alors
$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

La démonstration se fait par récurrence : la formule au rang 0 est simplement $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$, et l'hérédité se prouve par une intégration par parties.

2. a. Pour simplifier les écritures, posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

Supposons trouvé $n \geq 1$ tel que h soit n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et que l'on ait $h^{(n)}(x) = \lambda^{s_n} h(\lambda^n x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui est vrai pour $n = 1$.

La fonction $x \mapsto \lambda^{s_n} h(\lambda^n x)$ est dérivable puisque h l'est, donc h est $n+1$ fois dérivable ; de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h^{(n+1)}(x) = \lambda^{s_n+n} h'(\lambda^n x) = \lambda^{s_{n+1}} h(\lambda^{n+1} x)$ par définition de s_n et h . La propriété est donc encore vraie au rang $n+1$.

Par suite, h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad h^{(n)}(x) = \lambda^{s_n} h(\lambda^n x)$.

b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $h(x) = \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} h^{(n)}(t) dt$ d'après les questions précédentes.

La fonction h est continue donc bornée sur le segment $S = [0, x]$ ou $[x, 0]$ (suivant le signe de x). Soit M tel que $|h(t)| \leq M$ pour tout $t \in S$.

Soit $t \in S$. Puisque $0 < \lambda < 1$, on a $\lambda^n t \in S$, donc $|h^{(n)}(t)| = \lambda^{n-1} |h(\lambda^n t)| \leq \lambda^{n-1} M$. On en déduit $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} h^{(n)}(t) dt \right| \leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} \lambda^{n-1} M dt \right| = M x^2 \frac{(\lambda|x|)^{n-1}}{n!}$.

Par croissances comparées, pour toute valeur de x , le majorant a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$, donc le reste intégral dans la formule de Taylor tend vers 0. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

En posant $a = 0$, la formule trouvée pour la dérivée n -ième donne $h^{(n)}(0) = a \lambda^{n(n-1)/2}$ pour tout

n . Finalement, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k(k-1)/2}}{k!} x^k$. Cela montre en particulier que l'ensemble des fonctions h vérifiant l'équation initiale forme une droite vectorielle.

18. ENSEA – M. Sphabmixay

Exercice 1

Déterminer les fonctions Ψ de classe C^1 de $]0, +\infty[^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2 \quad x \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Corrigé

Le terme $\sqrt{x^2 + y^2}$ incite à passer en polaires : on pose donc $\Phi(r, \theta) = \Psi(r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour tout $(r, \theta) \in D = \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi/2[$. On a alors, pour tout $(r, \theta) \in D$,

$$r \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \theta) = (r \cos \theta) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + (r \sin \theta) \frac{\partial \Psi}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Par suite, Ψ est solution de l'équation initiale si et seulement si $r \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta$ pour tout $(r, \theta) \in D$, ce qui revient à dire qu'il existe une fonction α , de classe C^1 de $]0, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $(r, \theta) \in D$, $\Phi(r, \theta) = \cos \theta \ln r + \alpha(\theta)$.

Sur le domaine considéré, on a $\theta = \text{Arctan}(y/x)$, qui ne dépend que de y/x ; les solutions de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \ln(x^2 + y^2) + \beta\left(\frac{y}{x}\right)$, où β est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

Factoriser $P = X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Corrigé

Première méthode : on commence par factoriser dans $\mathbb{C}[X]$: $P = \prod_{k=0}^5 (X - \alpha_k)$ où, pour tout k , $\alpha_k = \exp i(\pi/6 + k\pi/3)$ est la k -ième racine sixième de -1 . Aucune racine n'est réelle, on regroupe donc chaque terme avec son conjugué ; ici, pour tout k , $\overline{\alpha_k} = \alpha_{5-k}$, donc

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=0}^2 (X - \alpha_k)(X - \overline{\alpha_k}) = \prod_{k=0}^2 \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \right) X + 1 \right) \\ &= (X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

Deuxième méthode : on commence par factoriser à l'aide de M. Bernoulli :

$$\begin{aligned} P &= (X^2)^3 - (-1)^3 = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) \\ &= (X^2 + 1)[(X^2 + 1)^2 - 3X^2] \\ &= (X^2 + 1)(X^2 + 1 - X\sqrt{3})(X^2 + 1 + X\sqrt{3}) \end{aligned}$$

19. Centrale 2 – M. Levy

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que le reste de la division euclidienne de n par k est supérieur à $k/2$.

1. [Python] Écrire une fonction qui calcule une valeur approchée de $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card}(A_n)}{n}$.

En admettant l'existence de ces quantités, calculer une valeur approchée de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

et $I = \int_0^1 \left[2 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) \right] dt.$

Que remarque-t-on ?

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que (u_n) converge.

b. En déduire que l'existence de S et sa valeur exacte.

3. a. Soit $f : t \in]0, 1] \mapsto \left[2 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) \right]$.

Quels sont les points de discontinuité de f ?

b. Justifier l'existence de I et donner sa valeur.

4. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{Card}(A_n) = \sum_{k=1}^n \left[2 \left(\frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) \right]$.

b. En déduire que ℓ existe et donner sa valeur.

Corrigé

1. Voir Mister P.

2. a. Vous ne devriez plus avoir besoin de moi pour celle-là.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient facilement $\frac{1}{(k+1)(2k+1)} = \frac{2}{2k+1} - \frac{1}{k+1}$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(2k+1)} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= 2 \left(H_{2n+1} - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) - (H_{n+1} - 1) \\ &= 2H_{2n} - 2H_n - 1 + \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

où on s'est ramené à H_{2n} et H_n pour simplifier les calculs suivants.

Au voisinage de $+\infty$, la question **a.** donne $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$; par suite,

$$2H_{2n} - 2H_n = 2(\ln(2n) - \ln n) + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln 2$$

Finalement, $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \ln 2 - 1$.

- 3. a.** Soit $t \in]0, 1]$. Posons $k = \lfloor 1/t \rfloor$; puisque $1/t \geq 1$, on a $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $2k$ est entier, on a $f(t) = \lfloor (2/t) - 2k \rfloor = \lfloor 2/t \rfloor - 2k$.

D'autre part, on a $k \leq 1/t < k+1$ donc $2k \leq 2/t < 2k+2$. Donc,

- soit $2k \leq 2/t < 2k+1$, c'est-à-dire $t \in \left] \frac{2}{2k+1}, \frac{2}{2k} \right]$, et dans ce cas $\lfloor 2/t \rfloor = 2k$, d'où $f(t) = 0$;
- soit $2k+1 \leq 2/t < 2k+2$, c'est-à-dire $t \in \left] \frac{2}{2k+2}, \frac{2}{2k+1} \right]$, et dans ce cas $\lfloor 2/t \rfloor = 2k+1$, d'où $f(t) = 1$.

Les points de discontinuité de f sont donc les $2/p$, pour p entier tel que $p \geq 2$; plus précisément, t appartient à un et un seul intervalle de la forme $]2/(p+1), 2/p]$; $f(t)$ vaut alors 0 si p est pair, et 1 si p est impair.

- b.** Tout segment inclus dans $]0, 1]$ ne contient donc qu'un nombre fini de points de discontinuité, et f a des limites à gauche et à droite en ces points, donc f est continue par morceaux sur $]0, 1]$. De plus, $0 \leq f \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0, 1]$, donc f l'est aussi.

Par suite, $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f(t) dt$. Or, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_{1/n}^1 f(t) dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} f(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/(k+1/2)} 1 dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1/2} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(2k+1)} \end{aligned}$$

et donc $I = S = 2 \ln 2 - 1$.

- 4. a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les termes qui apparaissent dans la somme sont les $f(k/n)$.

Notons d'autre part que, si $q = \lfloor n/k \rfloor$, alors $qk \leq n < qk+k$, donc $0 \leq r = n - qk < k$; par suite, $q = \lfloor n/k \rfloor$ est le quotient dans la division euclidienne de n par k , et $(n/k) - \lfloor n/k \rfloor = (n/k) - q = r/k$ est égal au rapport du reste sur k .

On utilise **3.a** : pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un seul $p \geq 2$ tel que $k/n \in]2/(p+1), 2/p]$. On a alors :

- si p est pair, alors $f(k/n) = 0$; cela montre que $r/k \in [0, 1/2[$, donc que $k \notin A_n$;
- si p est impair, alors $f(k/n) = 1$; cela montre que $r/k \in [1/2, 1[$, donc que $k \in A_n$.

Finalement, $f(k/n)$ vaut 1 si $k \in A_n$, 0 sinon; on a donc bien $\text{Card}(A_n) = \sum_{k=1}^n f(k/n)$.

- b.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\frac{\text{Card}(A_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = R_n$, qui est une somme de Riemann pour

f sur $]0, 1]$. On ne dispose malheureusement pas de résultat sur ces sommes dans cette situation (intégrale généralisée), il faut donc prouver que R_n tend vers $I = \int_0^1 f(t) dt$.

Pour cela, on interprète chaque terme $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ comme l'intégrale sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ de la constante

$f(k/n)$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I - R_n| \leq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt$. On peut déjà

noter que, puisque f ne prend que les valeurs 0 et 1, l'expression dans l'intégrale est majorée par 1.

Ce qui suit est volontairement très approximatif, de manière à rester à peu près clair. On sépare les termes en ceux pour lesquels $k \leq \sqrt{n}$, c'est-à-dire $k/n \leq 1/\sqrt{n}$, et les autres.

La somme des termes pour lesquels $\frac{k}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ est en gros $\int_0^{1/\sqrt{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt$, qui est majorée par $1/\sqrt{n}$ d'après la remarque précédente.

D'autre part, si l'intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ ne contient pas de discontinuité de f , alors f est constante sur ce segment, et donc $\int_{(k-1)/n}^{k/n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt = 0$; et cette intégrale est majorée par $\frac{1}{n}$ si l'intervalle contient une discontinuité. Or, $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{p} \leq 1 \iff 2 \leq p \leq 2\sqrt{n}$: il y a donc au plus $2\sqrt{n}$ points de discontinuité de f sur $[1/\sqrt{n}, 1]$. La somme des intégrales sur les intervalles considérés est donc majorée par $2\sqrt{n} \times \frac{1}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Finalement, $|I - R_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}}$, donc a bien pour limite 0. On en déduit $\ell = I = 2 \ln 2 - 1$.

20. Mines – M. Mion

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $f_n : t \mapsto \ln(1 + \sqrt{1+t^n})$. Montrer que f admet des dérivées en 0 à tout ordre, et donner la valeur de ces nombres dérivés.

Correction

Sur $] -1, 1[$ par exemple, $t \mapsto 1 + t^n$ est de classe C^∞ et strictement positive, donc $t \mapsto \sqrt{1+t^n}$ est aussi de classe C^∞ par composition; de plus, $1 + \sqrt{1+t^n} > 0$, donc $t \mapsto \ln(1 + \sqrt{1+t^n})$ est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, donc en particulier a des dérivées à tout ordre en 0.

Pour $t \in]-1, 1[$ et non nul, on a

$$\begin{aligned} f'_n(t) &= \frac{nt^{n-1}}{2\sqrt{1+t^n}} \frac{1}{1+\sqrt{1+t^n}} = \frac{nt^{n-1}}{2\sqrt{1+t^n}} \frac{\sqrt{1+t^n}-1}{t^n} \\ &= \frac{n}{2t} [1 - (1+t^n)^{-1/2}] \end{aligned}$$

On applique alors le développement en série entière de $(1+u)^{-1/2}$ avec $u = t^n$ (légitime puisque ce développement marche sur $] -1, 1[$). Dans la parenthèse, les termes constants s'éliminent; en multipliant ensuite par $n/2t$, on obtient donc un développement en série entière de f'_n , d'où l'on déduit celui de f_n par primitivation. Il n'y a plus qu'à dire que les coefficients de ce développement sont les $f^{(k)}(0)/k!$ (et à faire les calculs, bien sûr).

Exercice 2

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant $AB = A + B$. Montrer que $\text{rg } A = \text{rg } B$.

Correction

Grosse astuce : on a $(I_n - A)(I_n - B) = I_n - A - B + AB = I_n$, donc $I_n - A$ et $I_n - B$ sont inverses l'une de l'autre. Par suite, pour toute colonne X :

$$AX = 0 \iff (I_n - A)X = X \iff X = (I_n - A)^{-1}X \iff X = (I_n - B)X \iff BX = 0$$

Par suite, A et B ont même noyau, donc, par la formule du rang, même rang.

21. CC INP – M. Perault

Banque

Exercice 4.

Exercice

Soit $n \geq 3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ de matrice A dans la base canonique.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit de rang 2.
2. On suppose ici $\text{rg } f = 2$.
 - a. Préciser $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
 - b. Montrer que $\mathbb{C}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - a_n \lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Corrigé

1. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
 Si $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, alors les vecteurs $f(e_k)$ sont tous colinéaires à e_n , donc $\text{Im } f \subset \text{Vect}(e_n)$ et le rang de f vaut au plus 1.
 Si par contre il existe $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $a_i \neq 0$, alors $f(e_i) = a_i e_n \neq 0$, et $f(e_n)$ n'est pas colinéaire à e_n , puisque sa i -ème coordonnée est non nulle. Puisque les $f(e_k)$, pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, sont tous colinéaires à e_n , on a $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Vect}(e_n, f(e_n))$, donc $\text{rg } f = 2$ puisque e_n et $f(e_n)$ sont indépendants.
 Finalement, $\text{rg } f = 2 \iff \exists i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad a_i \neq 0$.
2. a. On a vu à la question 1 que $\text{Im } f = \text{Vect}(e_n, f(e_n))$.
 Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors, $f(u) = 0$ si et seulement si $\begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket & a_k x_n = 0; \\ \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0. \end{cases}$
 Puisqu'il existe $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $a_i \neq 0$, la première condition équivaut à $x_n = 0$. Le noyau est donc caractérisé par les deux équations $x_n = 0, \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k = 0$.
 b. Supposons $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$. Soit $u \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. Puisque $u \in \text{Im } f$, il est de la forme $\lambda e_n + \mu f(e_n) = (\mu a_1, \dots, \mu a_{n-1}, \lambda + \mu a_n)$.
 Puisque $u \in \text{Ker } f$, on a alors $\lambda + \mu a_n = 0$, et $\sum_{k=1}^{n-1} a_k (\mu a_k) = \mu \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$. L'hypothèse faite au départ donne alors $\mu = 0$, puis $\lambda = -\mu a_n = 0$, donc $u = 0$.
 Par suite, $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont en somme directe, et la formule du rang montre que la dimension de leur somme est n : ils sont donc bien supplémentaires.
 Supposons maintenant $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$. Alors, le vecteur $u = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$ est non nul, vérifie les deux équations de $\text{Ker } f$ donc est dans $\text{Ker } f$; enfin, il est égal à $f(e_n) - a_n e_n$, donc appartient à $\text{Vect}(e_n, f(e_n)) = \text{Im } f$. Par suite, $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ ne sont pas en somme directe, ce qui achève la démonstration.
3. On a déjà vu que f est de rang au plus 2, donc que son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ (puisque $n \geq 3$) : 0 est donc bien valeur propre de f .
 Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}^*$; soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda u &\iff \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket & a_k x_n = \lambda x_k \\ \sum_{k=1}^n a_k x_k = \lambda x_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket & x_k = \frac{a_k}{\lambda} x_n; \\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k^2}{\lambda} x_n + a_n x_n = \lambda x_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\lambda^2 \neq a_n \lambda + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2$, la dernière équation donne $x_n = 0$, les autres équations donnent alors $x_k = 0$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et donc le seul vecteur u solution est le vecteur nul : λ n'est donc pas valeur propre.
 Si $\lambda^2 = a_n \lambda + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2$, alors la dernière équation est vérifiée pour tout choix de x_n ; le vecteur $u_\lambda = (a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda)$ est alors un vecteur non nul vérifiant $f(u) = \lambda u$, donc λ est valeur propre de f .
 On a donc bien l'équivalence demandée.

4. Dans le cas $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, la matrice A est déjà diagonale. On suppose donc dans la suite que l'un au moins des nombres $a_1, \dots, a_{n-1}$ est non nul ; on a alors en particulier $\text{rg } f = 2$.

Si f est diagonalisable, alors $\mathbb{C}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ (dans une base de vecteurs propres, les vecteurs associés à la valeur propre 0 engendrent le noyau, les autres engendrent l'image) ; donc $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$ par la question 2.b.

Réciproquement, supposons cette condition réalisée ; on sait déjà que $\text{Ker } f$ est de dimension $n - 2$. Les valeurs propres non nulles de f sont les racines de $X^2 - a_n X - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2$ (qui sont bien non nulles, le terme constant est non nul). Si ces deux racines sont distinctes, c'est-à-dire si $a_n^2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$, on a alors deux autres sous-espaces propres de dimension au moins 1 ; la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut donc (au moins) n , et f est diagonalisable.

Si l'équation a une racine double λ_0 , c'est-à-dire si $a_n^2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$, la matrice $A - \lambda_0 I_n$ est de rang au moins $n - 1$ (les $n - 1$ premières colonnes sont indépendantes puisque $\lambda_0 \neq 0$), et donc le sous-espace propre associé est de dimension 1. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut donc $n - 1$, donc f n'est pas diagonalisable.

Finalement, f est diagonalisable uniquement dans les deux cas suivants :

- $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$;
- $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$ et $a_n^2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$.

On notera qu'en prenant $a_1 = 1$, $a_2 = i$, et tous les autres coefficients nuls, aucune des deux conditions n'est réalisé : cela donne un exemple de matrice symétrique **complexe** non diagonalisable.