Exercices posés à l'oral Centrale/Maple en 2013 – énoncés relevés dans la RMS

Les questions utilisant Maple sont repérées par un **(M)**.

1. **a.** **(M)** Soit $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 1\}$. Déterminer tous les couples (x, y) d'éléments de S tels que $0 \leqslant x \leqslant 1000$.

b. Soit G l'ensemble des $x+y\sqrt{3}$ tels que $(x, y) \in S$ et $x+y\sqrt{3} \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

c. Montrer que $G \cap \,]1, +\infty[$ contient un plus petit élément ω et déterminer cet élément.

d. Montrer que $G = \{\omega^n ; n \in \mathbb{Z}\}$.

2. Soient $X_n = \{M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i, j) \quad |m_{ij}| \leqslant 1\}$ et $d_n = \max\{|\det A| ; A \in X_n\}$. On appelle matrice extrémale toute matrice M de X_n vérifiant $|\det M| = d_n$.

a. Justifier l'existence de d_n. Montrer que $1 \leqslant d_n \leqslant n!$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice extrémale dont tous les coefficients sont dans $\{-1, 1\}$; on pourra considérer le cofacteur associé à un coefficient donné, et distinguer s'il est nul ou non.

c. **(M)** Calculer d_2 et d_3.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On étudie les couples $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f^2 = 0$, $g^2 = 0$ et $fg + gf = \mathrm{Id}_E$.

a. **(M)** À l'aide de Maple, résoudre le problème en dimension 2 et 3.

b. Soit (f, g) une solution. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} g$.

c. Déterminer les solutions, en discutant suivant la valeur de n.

4. Soient n dans $\mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'endomorphisme Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \Phi_A(M) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k M A^{n-1-k}$.

a. **(M)** Programmer la fonction $(A, M) \longmapsto \Phi_A(M)$.

b. Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonale, calculer les images par Φ_D des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Qu'en déduit-on sur Φ_A si A est diagonalisable ?

c. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si Φ_A l'est.

d. Trouver les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\Phi_A = 0$.

5. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.

a. Montrer que N admet un minimum m_n et un maximum M_n sur $O_n(\mathbb{R})$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$.

c. **(M)** Écrire une procédure qui prend en argument une matrice A et qui renvoie $N(A)$. Écrire une procédure dans le cas $n = 2$ puis $n = 6$ qui calcule la valeur de N pour des matrices orthogonales générées aléatoirement. Conjecturer la valeur de m_n et M_n.

d. Calculer m_n.

e. Montrer que les matrices A telles que $N(A) = m_n$ forment un groupe fini dont on donnera le cardinal.

6. Soit (a_n) définie par $a_0 = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\quad \forall n \geqslant 2 \quad a_n = \dfrac{n}{n+1}\, a_{n-1} - \dfrac{5}{16}\, \dfrac{n-1}{n+1}\, a_{n-2}$.

a. **(M)** Écrire une fonction qui calcule a_n. Donner une valeur approchée de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

b. Déterminer a_n et vérifier que $\sum a_n$ converge.

7. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par $u_1 = a$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{\sqrt{n}}$.

a. **(M)** Conjecturer à l'aide du logiciel le comportement de la suite.

b. Pour $n \geqslant 2$ entier, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{2^{k+1}}$. Exprimer $\dfrac{\ln(u_n)}{2^{n-1}}$ en fonction de a et S_n.

c. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, tel que, pour $a < \alpha$, (u_n) tende vers 0 et que, pour $a > \alpha$, (u_n) tende vers $+\infty$.

d. Donner un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{2^{k+1}}$. En déduire le comportement de (u_n) si $a = \alpha$.

8. Soit u une suite réelle à valeurs dans $]-1, +\infty[$. On dit que le produit infini $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ converge lorsque $\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)$ admet une limite réelle $\ell > 0$ quand N tend vers $+\infty$. On note alors $\ell = \prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$.

a. Si $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ converge, que dire de la convergence de la suite u ?

b. On prend $u_n = -\dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 2$. Convergence et valeur de $\prod_{n=2}^{+\infty}(1+u_n)$?

c. **(M)** On prend $u_{2n} = -\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ pour $n \geqslant 1$. Convergence de $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ selon Maple ? Montrer la convergence.

d. Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers, rangés dans l'ordre croissant, et $s > 1$. On pose $V_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1-{p_k}^s}$. Convergence de ce produit infini ? Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} < V_n < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.

9. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit r_n le nombre de couples $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $u^2 + v^2 = n$.

a. **(M)** Calculer r_n pour $n \in [\![0, 250000]\!]$. Vérifier que $r_{250000} = 8$.

b. **(M)** On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r_k$. Calculer $4m_n$ pour $n \in [\![1, 25]\!]$.

c. En utilisant un argument d'aire, montrer que $m_n = \dfrac{n}{4} + O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.

d. Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. Déterminer le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x} f(x)^2$.

10. a. **(M)** Donner le développement en série entière de $z \longmapsto (1+z)^\alpha$. Le retrouver avec Maple. On note $T_\alpha = (T_{\alpha,k})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients de ce développement en série entière.

b. **(M)** Construire pour $n = 6$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n+1,n+2}(\mathbb{C})$ dont la k-ème ligne porte les $n+2$ premiers termes de la suite T_{-n+k+1}. Que remarque-t-on ?

c. Soit $G_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} T_{n-k,k} z^k$.

i. **(M)** Trouver avec Maple une expression de $G_n(z)$.

ii. Trouver le rayon de convergence de la série entière précédente.

iii. Exprimer $T_{-\alpha,k}$ en fonction de $T_{n+\alpha-k,k}$.

11. Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les racines complexes de Q et on pose, pour $r \geqslant 0$, $I(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{P(re^{i\theta})}{Q(re^{i\theta})}\, d\theta$.

- **a.** **(M)** Avec Maple, observer dans des cas simples le comportement de $I(r)$ pour r assez grand.
- **b.** Montrer que $I(r)$ est bien définie lorsque $r \notin \{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_q|\}$. Montrer que I est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Que vaut I lorsque $Q = 1$?
- **c.** Montrer que I est constante sur tout intervalle ne contenant aucun $|\lambda_k|$.
- **d.** On suppose que $\deg P < \deg Q$; montrer que, si $r > \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_q|\}$, alors $I(r) = 0$. Que se passe-t-il si $\deg P \geqslant degQ$?

12. Soit $f_0 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ 2π-périodique et paire telle que : $\forall x \in [0, \pi] \quad f_0(x) = \sqrt{\pi} - \sqrt{x}$. On note (S_n) les sommes partielles de sa série de Fourier.

- **a.** **i.** **(M)** Tracer sur un même graphe f_0 et S_{50}. Commenter.
  - **ii.** Calculer les premiers coefficients de Fourier de f_0. Que remarque-t-on ?
- **b.** Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique dont les coefficients de Fourier sont tous positifs : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) \in \mathbb{R}_+$. Pour $r \in]0, 1[$, on pose $S(r) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(c_n(f) + c_{-n}(f)\big) r^{|n|}$.
  - **i.** Justifier l'existence de $S(r)$. Écrire S sous la forme $S(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) P(r, t)\, dt$ où P ne dépend pas de f.
  - **ii.** Montrer que S est bornée.
  - **iii.** Montrer que les séries de termes généraux $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ convergent. Que peut-on en déduire quant à la série de Fourier de f ?
- **c.** Montrer que les coefficients de Fourier de f_0 sont tous positifs.

13. Soit C_1 l'ensemble des points $(x, y) \in (R_+^*)^2$ vérifiant $y^x = x$.

- **a.** **(M)** Tracer $C_1 \cap]0, 5] \times]0, 2]$.
- **b.** Trouver le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $y^x = x$, en fonction de y.
- **c.** **(M)** Soit C_2 l'ensemble des points $(x, y) \in (R_+^*)^2$ vérifiant $y^{(y^x)} = x$. Tracer $C_2 \cap]0, 5] \times]0, 2]$.
- **d.** Trouver un paramétrage de $C_2 \setminus C_1$ avec $t = y^x / x$. En étudiant ce paramétrage, trouver le nombre de solutions de $y^{(y^x)} = x$ en fonction de y.

14. Soient A, B et C trois points non alignés du plan $\mathbb{R}^2$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit f_p la fonction du plan dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout point M, $f_p(M) = AM^p + BM^p + CM^p$.

- **a.** **(M)** On prend $A = (0, 0)$, $B = (1, 3)$ et $C = (2, 1)$. Représenter graphiquement f_1, f_2 et f_3. Déterminer les points critiques de ces fonction. Quelle conjecture peut-on faire ?
- **b.** **(M)** Reprendre la première question avec $A = (0, 0)$, $B = (4, 1)$ et $C = (3, 3)$.
- **c.** On revient au cas général. Montrer que f_p atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer le résultat conjecturé dans la première question.