1. Centrale Maths 1 (Remy)

Les deux questions sont indépendantes.

a. Soit P un polynôme à coefficients entiers, de degré $d \geqslant 1$. On suppose trouvés $n \in \mathbb{Z}$ et un nombre premier p tels que $P(n) = p$.

i. Pour tout entier k, montrer que $P(x+kp) \equiv P(x)\ [p]$. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P(x+kp)$ ne soit pas premier.

Existe-t-il $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $Q(n)$ soit premier pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

ii. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on note $w(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n, et on pose $w(0) = 0$. Soit alors $W = \{w\big(P(n)\big) ; n \in \mathbb{Z}\}$.

On suppose que W est majoré. On pose $N = \max W$, on choisit $u \in \mathbb{Z}$ tel que $w\big(P(u)\big) = N$ et on pose $a = P(u)$.

Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{Z}$, $P(u + a^2 v) \in \{-a, 0, a\}$. Que peut-on en conclure ?

b. i. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Soient p un nombre premier et $b \in \mathbb{N}^*$. On suppose connu $A \in \mathbb{Z}$ solution de l'équation $P(x) \equiv 0\ [p^b]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

En discutant suivant la classe de congruence de $P(A)$ modulo p^{b+1} et celle de $P'(A)$ modulo p, résoudre le système $\begin{cases} P(x) \equiv 0\ [p^{b+1}] \\ x \equiv A\ [p^b] \end{cases}$.

ii. Résoudre dans $\mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$ l'équation $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ (sans garantie sur la valeur des coefficients).

Corrigé

a. i. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $(x+kp)^q = x^q + \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} k^j p^j x^{q-j}$. Puisque les termes de la somme sont tous divisibles par p, on a donc $(x+kp)^q \equiv x^q\ [p]$. Si $P = \sum_{q=0}^{d} a_q X^q$, avec $a_q \in \mathbb{Z}$ pour tout $q \in [\![0, d]\!]$, on a donc $P(x+kp) = \sum_{q=0} a_q (x+kp)^q \equiv \sum_{q=0} a_q x^q\ [p]$ soit $P(x+kp) \equiv P(x)\ [p]$.

Puisque $P(x) = p$, le seul nombre premier congru à $P(x)$ modulo p est p lui-même. Si $P(x+kp)$ est premier pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a donc $P(x+kp) = p$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Le polynôme P prendrait alors une infinité de fois la valeur p, donc serait constant égal à p, ce qui contredit l'hypothèse $\deg P \geqslant 1$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P(x+kp)$ ne soit pas premier.

On en déduit immédiatement qu'il n'existe pas de $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(n)$ soit premier pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

ii. Soit $v \in \mathbb{Z}$; pour alléger les écritures, on pose $b = P(u + a^2 v)$.

On montre comme à la question précédente que a^2 divise $P(u+a^2v) - P(u) = b - a$; on en déduit que a divise $P(u + a^2 v) = b$.

Supposons de plus $b \neq 0$, et étudions ses diviseurs premiers. Les diviseurs premiers de a divisent tous b ; cela donne déjà le nombre maximal de diviseurs premiers pour un nombre de la forme $P(n)$, donc b n'a pas d'autres diviseurs premiers que ceux de a.

Soit donc p un diviseur premier de a, et α (respectivement β) son exposant dans la décomposition de a (respectivement b) ; on a donc $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta$.

Supposons $\alpha < \beta$. Alors $p^{\alpha+1}$ divise b ; il divise aussi a^2 puisque $\alpha + 1 \leqslant 2\alpha$, donc il divise $P(u + a^2 v) - P(u) = b - a$; par suite, il divise a, ce qui contredit la définition de α. On a donc $\alpha \geqslant \beta$.

Puisque ceci est vrai pour tout diviseur premier de a, et que b n'a pas d'autre diviseur premier que ceux-là, on en conclut que b divise a. Puisque a divise aussi b, on a donc $b = a$ ou $b = -a$.

On a donc finalement $b \in \{0, -a, a\}$.

Si $a \neq 0$, cela entraîne que l'une de ces trois valeurs est prise une infinité de fois par le polynôme P, qui est donc constant.

Enfin, si $a = 0$, alors $w\big(P(n)\big) = 0$ pour tout n, donc $P(n) \in \{-1, 1, 0\}$ pour tout n ; encore une fois, P est un polynôme constant.

On a donc démontré que, si P est un polynôme non constant, alors pour chaque $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ ayant un nombre de diviseurs premiers supérieur ou égal à N. Cela montre en particulier que l'ensemble des nombres premiers divisant au moins l'un des $P(n)$ est infini.

b. i. Le nombre x vérifie la seconde congruence si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = A + kp^b$.

On a alors

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad x^q = (A + kp^b)^q = A^q + qkp^bA^{q-1} + \sum_{j=2}^{q} \binom{j}{q} k^j p^{jb} A^{q-j} \equiv A^q + qkp^bA^{q-1}\ [p^{b+1}]$$

Si $P = \sum_{q=0}^{d} a_q X^q$, on en déduit

$$P(x) = a_0 + \sum_{q=1}^{d} a_q x^q \equiv a_0 + \sum_{q=1}^{d} a_q A^q + kp^b \sum_{q=1}^{d} q a_q A^{q-1} \equiv P(A) + kp^b P'(A) \ \ [p^{b+1}]$$

Puisque $P(A) \equiv 0\ [p^b]$, il existe un unique $c \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $P(A) \equiv cp^b\ \ [p^{b+1}]$ (c est le reste dans la division de $(P(A)/p^b)$ par p). On a donc finalement

$$P(x) \equiv \big(c + kP'(A)\big)p^b \ \ [p^{b+1}]$$

donc $x = A + kp^b$ est solution du système si et seulement si $c + kP'(A)$ est multiple de p. On discute alors suivant $P'(A)$:

- si p divise $P'(A)$, alors
  - ▷ soit $c = 0$, c'est-à-dire $P(A) \equiv 0\ [p^{b+1}]$, et alors $x = A + kp^b$ est solution du système pour tout k ;
  - ▷ soit $c \neq 0$, c'est-à-dire $P(A)$ n'est pas divisible par p^b, et alors le système n'a pas de solution ;
- si $P'(A) \not\equiv 0\ [p]$, alors $P'(A)$ a un inverse d modulo p ; dans ce cas, le système a une seule solution modulo p^{b+1}, donnée par $x = A - dcp^b$.

ii. Vu l'incertitude sur le polynôme, je me contente de donner la méthode sans rentrer dans le détail des calculs.
Tout d'abord, $P(x)$ vaut 0 modulo 75 si et seulement si il vaut 0 modulo 3 et modulo 5^2.
La classe de $P(x)$ modulo 3 ne dépend que de celle de x : on essaie donc les trois valeurs possibles pour trouver les solutions.
Pour la classe modulo 25, on commence par déterminer les solutions modulo 5 en testant les cinq valeurs possibles. On applique ensuite la question précédente avec $p = 5$ et $b = 1$: pour chaque solution A modulo 5, on obtient une unique solution modulo 25 de la forme $A + 5k$ si $P'(A)$ n'est pas multiple de 5, et 0 ou 5 solutions si $P'(A)$ est multiple de 5.
Finalement, chaque couple (u, v) constitué d'une solution modulo 3 et d'une solution modulo 25 donne naissance à une et une seule solution modulo 75.
Pour être complet, il faut noter que l'on obtient ainsi toutes les solutions, en particulier parce qu'une solution modulo 25 vient forcément d'une solution modulo 5.

2. Petites Mines (Dougier)

Exo I. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) + f'(x)\big) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exo II. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} m_{ij} = 0 & \text{si } i > j \\ m_{ij} = j - i + 1 & \text{si } i \leqslant j \end{cases}$.
Montrer que M est inversible et donner son inverse.

Corrigé

Exo I. Pour exploiter l'hypothèse, on exprime f en fonction de $f' + f$; pour cela, on pose $f' + f = g$, où g est une fonction continue de limite 0 en $+\infty$, et on considère cette relation comme une équation différentielle en f, que l'on résout formellement.
Après multiplication par e^x, on obtient $f(x) = e^{-x}\Big(f(0) + \displaystyle\int_0^x e^t g(t)\,dt\Big)$. Le terme $e^{-x}f(0)$ a évidemment pour limite 0 en $+\infty$, étudions le terme intégral.
On choisit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|g(t)| < \varepsilon/2$ pour tout $t \geqslant A$. On en déduit, pour tout $x \geqslant A$,

$$\left|e^{-x}\int_A^x e^t g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, e^{-x}\int_A^x e^t\,dt = \frac{\varepsilon}{2}\,(1 - e^{A-x}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, A étant fixé, le nombre $I_A = \int_0^A e^t g(t)\,dt$ est une constante ; on peut donc choisir $B \geqslant A$ tel que, pour tout $x \geqslant B$, on ait $e^{-x} I_A < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\forall x \geqslant B \quad \left| e^{-x} \int_0^x e^t g(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui montre que la partie intégrale a bien pour limite 0 en $+\infty$.

Exo II. La matrice M vaut $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est triangulaire sans 0 dans la diagonale, donc inversible.

Pour calculer M^{-1}, on résout le système $MX = Y$, qui s'écrit

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = y_1 \\ \quad x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n = y_2 \\ \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad x_{n-1} + 2x_n = y_{n-1} \\ \qquad\quad x_n = y_n \end{cases}$$

On soustrait l'équation 2 à la 1, puis la 3 à la 2, jusqu'à la $n-1$ à la n :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_1 - y_2 \\ \quad x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_2 - y_3 \\ \qquad \ddots \qquad \vdots \quad \vdots \\ \qquad x_{n-1} + x_n = y_{n-1} - y_n \\ \qquad\quad x_n = y_n \end{cases}$$

On refait la même suite d'opérations :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = \quad y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \\ x_{n-1} = \qquad y_{n-1} - 2y_n \\ x_n = \qquad\qquad y_n \end{cases}$$

On a donc $M^{-1} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; plus précisément, p_{ij} vaut 1 si $j = i$ ou $j = i+2$, vaut -2 si $i = j+1$, et vaut 0 dans tous les autres cas.

3. Centrale Maths 2, incomplet (Remy)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + \ldots + x^{n-1}}\,dx$.

1. Convergence et limite de la suite.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad U_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(np+1)(np+2)}$.

3. a. Avec Maple, trouver un développement asymptotique de U_n en puissances de $1/n$ a l'ordre 10.
b. Justifier ce développement.

4. ?

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x+...+x^{n-1}}$.

1. Pour tout $n \in_N^*$, la fonction f_n est définie et continue sur $[0,1]$, donc U_n est bien défini. De plus :
- la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle (distinguer le cas $x=1$) ;
- la fonction limite est continue (par morceaux) sur $[0,1]$;
- on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0,1] \quad |f_n(x)| \leqslant 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0,1]$.

Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que (U_n) a pour limite $\int_0^1 0.\,dx = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour éviter les problèmes en 1, on considère maintenant U_n comme une intégrale sur $[0,1[$. On a alors, pour tout $x \in [0,1[$,

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)}{1-x^n} = (1-x)\sum_{p=1}^{+\infty} x^{np} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(x^{np}-x^{np+1}\right)$$

Pour tout $p \geqslant 1$, soit g_p la fonction $x \longmapsto x^{np}-x^{np+1}$. Alors :
- la série $\sum_{p=1}^{+\infty} g_p$ converge simplement sur $[0,1[$, de somme f_n ;
- la fonction somme est continue (par morceaux) sur $[0,1[$;
- pour tout $p \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 |g_p(t)|\,dt = \frac{1}{np+1} - \frac{1}{np+2} = \frac{1}{(np+1)(np+2)}$ et la série $\displaystyle\sum_p \frac{1}{(np+1)(np+2)}$ converge, puisque son terme général est un $O(1/p^2)$.

Le théorème d'interversion série/intégrale permet donc de conclure que

$$U_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t)\,dt = \sum_{p=1}^{+\infty}\int_0^1 g_p(t)\,dt = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(np+1)(np+2)}$$

3. a. Sur mon "Jurassic Maple", les instructions

```
> Un:= sum(1/(n*p+1)/(n*p+2),p=1..infinity) :
> series(Un,n=infinity,11);
```

fournissent

$$U_n = \frac{1}{6}\frac{\pi^2}{n^2} - 3\frac{\zeta(3)}{n^3} + \frac{7}{90}\frac{\pi^4}{n^4} - 15\frac{\zeta(5)}{n^5} + \frac{31}{945}\frac{\pi^6}{n^6} - 63\frac{\zeta(7)}{n^7} + \frac{127}{9450}\frac{\pi^8}{n^8} - 255\frac{\zeta(9)}{n^9} + \frac{73}{13365}\frac{\pi^{10}}{n^{10}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$$

Le terme général semble donc être $(-1)^k(2^{k-1}-1)\dfrac{\zeta(k)}{n^k}$.

b. Fixons $n \geqslant 3$. On a alors, pour tout $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(np+1)(np+2)} &= \frac{1}{np+1} - \frac{1}{np+2} = \frac{1}{np}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{np}} - \frac{1}{1+\frac{2}{np}}\right)\\ &= \frac{1}{np}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n^kp^k} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k2^k}{n^kp^k}\right)\\ &= \sum_{q=2}^{+\infty}\frac{(-1)^q(2^{q-1}-1)}{n^qp^q}\end{aligned}$$

en éliminant les termes d'indice $k=0$ puis en posant $q=k+1$; la convergence des séries géométriques est assurée par les conditions $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 3$.

On a donc $U_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=2}^{+\infty}\frac{(-1)^q(2^{q-1}-1)}{n^qp^q}$. Pour tout $p \geqslant 1$ et tout $q \geqslant 2$, posons $a_{pq} = \dfrac{(-1)^q(2^{q-1}-1)}{n^qp^q}$. On a alors :

- pour tout $p \geqslant 1$, on montre par un calcul analogue au précédent que la série $\sum_{q\geqslant 2} |a_{pq}|$ converge, et que
$$\sum_{q\geqslant 2} |a_{pq}| = \sum_{q\geqslant 2} \frac{(2^{q-1}-1)}{n^q p^q} = \frac{1}{np-2} - \frac{1}{np-1} = \frac{1}{(np-1)(np-2)}$$
- en notant b_p cette dernière somme, la série $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ converge, puisque le terme général est un $O(1/p^2)$.

On sait qu'alors on peut intervertir les Σ dans l'expression donnant U_n comme une somme double. Cela donne :
$$U_n = \sum_{q=2}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^q(2^{q-1}-1)}{n^q p^q} = \sum_{q=2}^{+\infty}\Big(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^q}\Big)\frac{(-1)^q(2^{q-1}-1)}{n^q} = \sum_{q=2}^{+\infty}\frac{(-1)^q(2^{q-1}-1)\zeta(q)}{n^q}$$
qui correspond bien au développement trouvé en **a.** : c'est un développement en série entière en $1/n$, on en déduit un développement asymptotique à n'importe quel ordre en tronquant la somme.

4. Centrale Maths 1, incomplet (Trentesaux)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$, on pose $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$ et $A_n(x) = \displaystyle\int_\pi^x T_n(t)\,dt$. On veut calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(nx)}{n}$.

Méthode 1 : a. Calculer $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

b. Calculer la limite de $A_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

c. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(nx)}{n}$ converge et donner sa valeur.

Méthode 2 : a. Montrer que la suite $\big(T_n(x)\big)$ est bornée.

b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(nx)}{n}$ converge.

c. ?

Corrigé

Méthode 1 : a. Vu en cours, donc je passe les détails. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$. Le cours sur les séries entières permet de conclure que sa somme est la primitive de $x \longmapsto (1+x)^{-1}$ qui s'annule en 0, donc $x \longmapsto \ln(1+x)$, mais uniquement sur l'ouvert $]-1,1[$; il reste donc un doute sur ce qui se passe pour $x=1$, où la série converge.

On utilise alors la partie "majoration du reste" du TSSA pour prouver que la série converge uniformément sur le segment $[0,1]$; sa somme y est donc continue, donc la valeur en 1, qui est la valeur cherchée, est la limite en 1 de la valeur sur $[0,1[$, c'est-à-dire $\ln 2$.

b. On somme la suite géométrique : $\displaystyle A_n(x) = \int_\pi^x \frac{e^{it}(1-e^{int})}{1-e^{it}}\,dt = \int_\pi^x \frac{e^{it}}{1-e^{it}}\,dt - \int_\pi^x \frac{e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\,dt$ puisque $e^{it} \neq 1$ sur $[\pi, x]$.

La deuxième intégrale est de la forme $\int_\pi^x e^{i(n+1)t} f(t)\,dt$ où f est de classe C^1 sur le segment $[\pi,x]$. On intègre par parties en primitivant le facteur $e^{i(n+1)t}$; les fonctions f et f' étant bornées sur le segment $[\pi,x]$, on en déduit facilement que cette intégrale a pour limite 0.

La première intégrale est donc la limite demandée ; en commençant par factoriser par $e^{it/2}$, on trouve
$$\int_\pi^x \frac{e^{it}}{1-e^{it}}\,dt = -\int_\pi^x \frac{e^{it/2}}{2i\sin(t/2)}\,dt = \frac{i}{2}\int_\pi^x \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\,dt - \int_\pi^x \frac{dt}{2} = i\ln\sin\frac{x}{2} + \frac{\pi - x}{2}$$

c. D'autre part, on a, pour tout $n \geqslant 1$:
$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{e^{ikt}}{ik}\Big]_\pi^x = -i\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}}{k} + i\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\pi}}{k} == -i\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}}{k} + i\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$$

Compte tenu de **a.** et **b.**, on en conclut que la série de terme général e^{ikx}/k converge, et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}-\ln\sin\frac{x}{2}+i\frac{\pi-x}{2}=-\ln 2-\ln\sin\frac{x}{2}+i\frac{\pi-x}{2}$$

La partie réelle donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(kx)}{k}=-\ln\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big)$.

Méthode 2 : a. Il suffit de calculer $T_n(x)=\dfrac{e^{it}(1-e^{int})}{1-e^{it}}$: le numérateur est clairement borné, et le dénominateur constant.

b. Pour alléger les écritures, on note T_n le nombre $T_n(x)$. Une transformation d'Abel donne

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}}{k}=e^{ix}+\sum_{k=2}^{n}\frac{T_k-T_{k-1}}{k}=e^{ix}+\sum_{k=2}^{n}\frac{T_k}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{T_k}{k+1}$$
$$=e^{ix}+\sum_{k=2}^{n-1}T_k\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)+\frac{T_n}{n}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ est positive convergente, et, puisque (T_n) est bornée, elle domine la série de terme général $T_k\Big(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\Big)$. Cette dernière série est donc convergente. Enfin, $\dfrac{T_n}{n}$ a pour limite 0. Donc, la série $\sum\dfrac{e^{ikx}}{k}$ converge ; et donc, $\sum\dfrac{\cos(kx)}{k}$, qui est sa partie réelle, converge aussi.

c.

5. CCP (Ben Tahir)

Exo I. (analyse 11 de la banque) Étudier la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n\geqslant 2$ et $\alpha\in\mathbb{R}$; on pourra distinguer les cas $\alpha\leqslant 0$ et $\alpha>0$.

Exo II. Pour $p\in\mathbb{N}$ et $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, on note S_p l'ensemble des suites (u_n) vérifiant

$$\exists P\in\mathbb{R}_p[X]\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=au_n+P(n)$$

a. Montrer que, si $u\in S_p$, alors P est unique ; on le notera P_u.
b. Montrer que S_p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
c. Montrer que ϕ, qui à u associe P_u, est linéaire et donner une base de son noyau. Que dire de son image ?
d. Donner une base de S_p (on pourra utiliser $R_k(X)=(X+1)^k-aX^k$ pour $k\in[\![0,p]\!]$).
e. Application : déterminer la suite (u_n) définie par

$$u_0=-2\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=2u_n-2n+7$$

Corrigé

Exo I. Dans le cas $\alpha\leqslant 0$, on a $u_n\geqslant 1/n$ à partir d'un certain rang, la série diverge.
Dans le cas $\alpha>0$, on a $u_n=f(n)$ où f est continue décroissante positive sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$; on sait qu'alors $\sum u_n$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
Or, f a pour primitive $t\longmapsto\dfrac{(\ln t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha\neq 1$, $t\longmapsto\ln|\ln t|$ si $\alpha=1$; elle est donc intégrable si et seulement si $\alpha>1$, donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Exo II. a. Soit $u\in S_p$. Si deux polynômes P et Q lui sont associés, alors $P(n)=Q(n)=u_{n+1}-au_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$; donc $P=Q$.
b. La suite nulle est dans S_p, avec $P_0=0$; et, si u et v sont dans S_p et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, alors, clairement, $\lambda u+\mu v\in S_p$, avec $P_{\lambda u+\mu v}=\lambda P_u+\mu P_v$.
Par suite, S_p est un sous-espace de l'espace des suites réelles.

c. La relation $P_{\lambda u+\mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$ traduit la linéarité de ϕ.
D'autre part, si $u \in S_p$, alors $u \in \operatorname{Ker}\phi$ si et seulement si $P_u = 0$, soit si et seulement si $u_{n+1} = au_n$ pour tout n. Le noyau de ϕ est donc l'ensemble des suites géométriques de raison a, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par la suite (a^n).
Enfin, pour tout $Q \in \mathbb{R}_p[X]$, la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = au_n + Q(n)$ est dans S_p, et $\phi(u) = P_u = Q$ d'après **a.** Par suite, $\operatorname{Im}\phi = \mathbb{R}_p[X]$.

d. Puisque $a \neq 1$, on a $\deg R_k = k$ pour tout k ; la famille $(R_0, R_1, \dots, R_p)$ est donc une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, notons $u^{(k)}$ la suite de S_p telle que $u_0 = 0$ et $P_u = R_k$; une récurrence immédiate montre que $u_n^{(k)} = n^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, p]\!]$.
L'image par ϕ de la famille $\mathcal{B}_1 = (u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(p)})$ est la famille libre $(R_0, R_1, \dots, R_p)$; par suite $\mathcal{B}_1$ est libre.
Soit $F = \operatorname{Vect}\mathcal{B}_1$. L'image par ϕ de la base $\mathcal{B}_1$ de F est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, donc ϕ réalise un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}_p[X]$. On sait qu'alors F est un supplémentaire dans S_p de $\operatorname{Ker}\phi$.
Puisque (a^n) est une base de $\operatorname{Ker}\phi$, la famille $\mathcal{B} = \big((a^n), u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(p)}\big)$ est donc une base de S_p.

e. Ici, on a $a = 2$ et on peut prendre $p = 1$; la suite (u_n) est donc combinaison linéaire des trois suites (2^n), $u^{(0)} = (1)$ et $u^{(1)} = (n)$.
On écrit donc les équations $u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma n$ pour $n = 0, 1, 2$; puisque $u_1 = 3$ et $u_2 = 11$, on en déduit $\alpha = 3$, $\beta = -5$ et $\gamma = 2$, soit $u_n = 3.2^n - 5 + 2n$ pour tout n.

6. CCP (Sato)

Exo I. (algèbre 41 de la banque) Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A|A'\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

a. Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exo II. Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

a. Démontrer que l'ensemble de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

b. Étudier la monotonie de F.

c. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs, de limite $+\infty$. Quelle est la limite de la suite $\big(x_n F(x_n)\big)$?
Donner un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$.

Corrigé

Exo I. a. La vérification ne pose pas de problème ; c'est le produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormale.

b. On a ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B + C$ où B est dans F et C est clairement orthogonale à F.
Par suite, B est le projeté orthogonal de A sur F, et la distance de A à F est $\|A - B\| = \|C\| = 1$.

Exo II. a. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{x_0 + t}$.
Si $x_0 > 0$, alors g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, et dominée en $+\infty$ par la fonction $t \longmapsto e^{-t}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$; par suite, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $F(x_0)$ est bien défini.
Si $x_0 = 0$, alors g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, mais $g(t) \sim 1/t$ en 0, et la fonction $1/t$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, donc g ne l'est pas non plus. Par suite, F n'est pas définie en 0.
Enfin, si $x_0 < 0$, la fonction g n'est pas définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc F n'est pas définie en x_0. Même si l'on essaie de découper l'intégrale en $\int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty}$, on montre comme dans le cas $x_0 = 0$ que ces deux intégrales ne sont pas définies.
Finalement, $DF = \mathbb{R}_+^*$.

b. Si $0 < x \leqslant y$, alors $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \geqslant \dfrac{e^{-t}}{y+t}$ pour tout $t \geqslant 0$, donc $F(x) \geqslant F(y)$: la fonction F est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $h_n : t \longmapsto \dfrac{x_n e^{-t}}{x_n + t}$; on a donc $\quad x_n F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt$. Alors :

- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $x_n > 0$;
- ▷ la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $h : t \longmapsto e^{-t}$, elle-même continue sur $\mathbb{R}_+$;
- ▷ on a $|h_n(t)| \leqslant e^{-t} = h(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geqslant 0$, et la fonction h est classiquement intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que $\int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt$ a pour limite $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ quand n tend vers $+\infty$; autrement dit, que $x_n F(x_n)$ a pour limite 1.
Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tendant vers $+\infty$, la caractérisation séquentielle de la limite montre que $xF(x)$ a pour limite 1 quand x tend vers $+\infty$; ce qui revient à dire que $F(x)$ équivaut à $1/x$ quand x tend vers $+\infty$.

7. ENSSAT (Sato)

Exo I. Soit A une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Donner une condition simple pour que A soit inversible.

b. Dans ce cas, montrer que son inverse est triangulaire supérieure.

Exo II. On note E l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Si $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $T_\lambda(f)$ la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{\lambda(t-x)} f(t)\,dt$, définie sur $\mathbb{R}_+$.

a. Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer $T_\lambda(f)$ comme produit de deux fonctions. En déduire que $T_\lambda(f) \in E$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application T_λ est-elle un endomorphisme de E ? Est-ce un automorphisme ?

c. Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par T_λ.

d. Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$; montrer que $T_\lambda - T_\mu = (\mu - \lambda) T_\lambda \circ T_\mu$.

e. Les différents endomorphismes T_λ commutent-ils entre eux ?

Corrigé

Exo I. **a.** Le déterminant de A est le produit de ses coefficients diagonaux ; donc A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

b. Il suffit par exemple de justifier que, quand l'on résout le système $AX = Y$, où X est une colonne inconnue, on obtient X sous la forme BY où $B = A^{-1}$ est triangulaire supérieure. On le justifie en faisant explicitement les calculs.
Il est peut-être plus clair de raisonner par récurrence sur n, en décomposant les matrices en blocs.
On peut enfin interpréter, comme dans le cours, la forme triangulaire par la stabilité de certains sous-espaces par l'isomorphisme canoniquement associé, et vérifier que l'isomorphisme inverse stabilise ces mêmes sous-espaces.

Exo II. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $T_\lambda(f)(x) = e^{-\lambda x} \times \displaystyle\int_0^x e^{\lambda t} f(t)\,dt$.

La fonction $x \longmapsto e^{-\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. L'expression sous l'intégrale ne dépend plus de x ; puisque f est supposée continue, les résultats sur l'intégrale fonction de sa borne supérieure montrent que le deuxième facteur est une fonction continue de x (et même de classe C^1). La fonction $T_\lambda(f)$ est donc bien continue sur $\mathbb{R}_+$, donc appartient à E.

b. On vient de voir que T_λ est une application de E dans E, et on vérifie immédiatement que $T_\lambda(\alpha f + \beta g) = \alpha T_\lambda(f) + \beta T_\lambda(g)$, donc que T_λ est linéaire. C'est donc un endomorphisme de E.
Par contre, comme noté en **a.**, la fonction $T_\lambda(f)$ est de classe C^1 pour toute $f \in E$. Par suite $\operatorname{Im} T_\lambda$ est inclus dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, qui est une partie stricte de E ; T_λ n'est donc pas surjective, ce n'est pas un automorphisme de E.

c. Pour alléger les écritures, posons $F = T_\lambda(f)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\quad e^{\lambda x} F(x) = \int_0^x e^{\lambda t} f(t)\,dt$ d'où, en dérivant puis en simplifiant par $e^{\lambda x}$, $\quad F'(x) + \lambda F(x) = f(x)$.
La fonction $T_\lambda(f)$ est donc solution de l'équation différentielle $y' + \lambda y = f$; plus précisément, c'est l'unique solution de cette équation vérifiant la condition de Cauchy $y(0) = 0$.

d. Le résultat est clair si $\lambda = \mu$; on supposera donc dans la suite $\lambda \neq \mu$.
Soit $f \in E$. Posons $F_1 = T_\lambda(f)$ et $F_2 = T_\mu(f)$. Avec ces notations, on veut démontrer que $F_1 - F_2 = (\mu - \lambda) T_\lambda(F_2)$.

D'après la question précédente, cela équivaut à montrer que $G = \dfrac{1}{\mu - \lambda}(F_1 - F_2)$ est la solution qui s'annule en 0 de l'équation $\quad y' + \lambda y = F_2$.
Toujours d'après la question précédente, on sait que $F_1' + \lambda F_1 = F_2' + \mu F_2 = f$, et donc

$$G' + \lambda G = \frac{1}{\mu - \lambda}(F_1' + \lambda F_1 - F_2' - \lambda F_2) = \frac{1}{\mu - \lambda}\big(f - (f - \mu F_2) - \lambda F_2\big)$$

ce qui donne bien $G' + \lambda G = F_2$; puisque clairement $G(0) = 0$, cela achève la démonstration.

e. Si $\lambda \neq \mu$, la question précédente fournit

$$T_\lambda \circ T_\mu = \frac{1}{\mu - \lambda}(T_\lambda - T_\mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}(T_\mu - T_\lambda) = T_\mu \circ T_\lambda$$

Les différents endomorphismes T_λ commutent donc.

8. Mines (Trentesaux)

Exo I. On pose $F_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \dfrac{1}{n!}X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

a. Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.

b. Soit $\Delta : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$, $P \longmapsto P(X+1) - P(X)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta(F_{n+1}) = F_n$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Déterminer sa base duale.

Exo II. Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire un espace réel muni d'un produit scalaire, qui est complet pour la norme associée). Soit F une partie fermée de E, telle que, pour tout $(x, y) \in F^2$, le vecteur $\dfrac{x+y}{2}$ appartient à F. Soit $d = \inf\{\|x\| ; x \in F\}$.
Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $\|x_0\| = d$.

Corrigé

Exo I. a. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_p = (F_0, F_1, \ldots, F_p)$ est échelonnée en degré, donc est une base de $\mathbb{C}_p[X]$; par suite

- ▷ toute sous-famille finie de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-famille d'une base $\mathcal{B}_p$, donc est libre : donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre ;
- ▷ tout polynôme P est dans un espace $\mathbb{C}_p[X]$, donc est combinaison linéaire de $\mathcal{B}_p$: donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice.

C'est donc bien une base de $\mathbb{C}[X]$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$; alors

$$\begin{aligned}\Delta(F_{n+1}) &= \frac{(X+1)X\cdots(X-n+1)}{(n+1)!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!} \\ &= \frac{X+1}{n+1}F_n - \frac{X-n}{n+1}F_n = F_n\end{aligned}$$

c. Soit $(k, p) \in \mathbb{N}^2$. D'après la question précédente, $\Delta^k(F_p) = F_{p-k}$ si $k \leqslant p$, avec en particulier $\Delta^p(F_p) = F_0 = 1$; et, puisque $\Delta(F_0) = 0$, $\Delta^k(F_p) = 0$ si $k > p$.
D'autre part, $F_0(0) = 1$, et $F_q(0) = 0$ pour tout $q \geqslant 1$.
La construction est alors claire : pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, soit φ_p l'application $Q \longmapsto \Delta^p(Q)(0)$. L'application Δ est clairement linéaire, donc Δ^p l'est aussi ; et l'application $R \longmapsto R(0)$ est une forme linéaire, donc φ_p est une forme linéaire pour tout p.
De plus, les remarques précédentes montrent que, pour tout $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$, $\varphi_p(F_q) = \Delta^p(F_q)(0)$ vaut 1 si $p = q$, et 0 si $p \neq q$. La famille $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est donc la base duale de $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$.

Exo II. Commençons par justifier l'existence. On sait qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de F telle que $(\|x_n\|)$ converge vers d.
Si $d = 0$, alors cette suite converge vers 0_E, qui est donc dans F puisque F est fermée ; et 0_E est alors le vecteur x_0 cherché.
Supposons désormais $d > 0$. On va montrer que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $\alpha > 0$. On peut choisir n_0 tel que $d \leqslant \|x_n\| \leqslant d + \alpha$ pour tout $n \geqslant n_0$. Soient p et q supérieurs à n_0.

Posons $z = \dfrac{x_p + x_q}{2}$ et $h = \dfrac{x_p - x_q}{2}$. Alors $z \in F$ par hypothèse ; et $x_p = z + h$ et $x_q = z - h$. On en déduit aisément $\|x_p\|^2 + \|x_q\|^2 = 2(\|z\|^2 + \|h\|^2)$. Par définition de p et q, on a donc

$$\|z\|^2 = \frac{\|x_p\|^2 + \|x_q\|^2}{2} - \|h\|^2 \leqslant (d+\alpha)^2 - \|h\|^2$$

Mais $z \in F$, donc $\|z\| \geqslant d$ par hypothèse ; en supposant de plus $\alpha \leqslant d$, on a donc

$$\|h\|^2 \leqslant (d+\alpha)^2 - d^2 \leqslant 2d\alpha + \alpha^2 \leqslant 3d\alpha$$

d'où finalement $\|x_p - x_q\| = 2\|h\| \leqslant 2\sqrt{3d\alpha}$.
Partant d'un $\varepsilon > 0$, on peut toujours choisir $\alpha \leqslant d$ tel que $2\sqrt{3d\alpha} < \varepsilon$; le n_0 choisi plus haut pour ce α vérifiera alors $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$ dès que p et q sont plus grands que n_0. La suite (x_n) est donc de Cauchy.
Puisque l'espace est complet, elle converge vers un vecteur ℓ ; ce vecteur est dans F puisque F est fermé, et vérifie $\|\ell\| = \lim \|x_n\| = d$, d'où l'existence.
Pour l'unicité, raisonnons par l'absurde, en supposant trouvés x et y distincts dans F tels que $\|x\| = \|y\| = d$. Posons $z = \dfrac{x+y}{2}$ et $h = \dfrac{x-y}{2}$; encore une fois, $x = z + h$ et $y = z - h$, d'où

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2(\|z\|^2 + \|h\|^2) \quad \text{soit} \quad \|z\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \|h\|^2 = d^2 - \|h\|^2$$

Mais h est non nul puisque $x \neq y$, donc $\|z\| < d$, alors que $z \in F$ par hypothèse, ce qui contredit la définition de d. On obtient bien une contradiction, ce qui prouve l'unicité.

9. CCP (Remy)

Exo I. (analyse 36 de la banque) Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0, 2\pi[$.

a. Expliquer pourquoi la série de Fourier de f converge, et donner sa limite.

b. Calculer sa série de Fourier ; en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exo II. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto aM + \mathrm{tr}(M)I_n$.

a. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Déterminer les éléments propres et le polynôme minimal de L.

c. Pour quelles valeurs de a, L est-il un automorphisme ? Calculer dans ce cas sa réciproque.

Corrigé

Exo I. a. La fonction f est continue par morceaux et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ (faire le dessin avec les demi-tangentes) ; le théorème de Dirichlet garantit que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est la régularisée g de f, définie par $g(t) = \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.
Plus précisément, g est 2π-périodique, égale à f sur l'ouvert $]0, 2\pi[$ puisque f y est continue, et

$$g(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0 + f(2\pi^-)}{2} = 2\pi^2$$

b. On calcule les coefficients trigonométriques. On obtient :

▷ $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2\,dt = \dfrac{8\pi^2}{3}$;

▷ pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 \cos(nt)\,dt = \dfrac{4}{n^2}$;

▷ pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 \sin(nt)\,dt = -\dfrac{4\pi}{n}$.

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{4\cos(nt)}{n^2} - \frac{4\pi\sin(nt)}{n}\Big)$. En particulier, avec $t = 0$, on obtient $2\pi^2 = \dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}$ soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (surprise !).

Exo II. **a.** C'est immédiat.

b. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f(M) = \lambda M$, alors $(a-\lambda)M + \mathrm{tr}(M)I_n = 0$, d'où la discussion :

▷ si (I_n, M) est libre, on a nécessairement $a - \lambda = \mathrm{tr}(M) = 0$; et réciproquement, si $\mathrm{tr}(M) = 0$, on obtient immédiatement $L(M) = aM$;

▷ sinon, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $M = \mu I_n$, et dans ce cas $L(M) = \mu L(I_n) = \mu(a+n)I_n = (a+n)M$.

On obtient donc deux sous-espaces propres : l'hyperplan des matrices de trace nulle, pour la valeur propre $\lambda_1 = a$ (c'est un hyperplan en tant que noyau de la forme linéaire tr) ; et la droite vectorielle engendrée par I_n, pour la valeur propre $\lambda_2 = a + n$.

Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on sait que L est diagonalisable, et que le polynôme $P_0 = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X^2-(2a+n)X+a(a+n)$ annule L. On en déduit que le polynôme minimal divise P_0.

On sait aussi que les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont racines de tous les polynômes annulateurs, en particulier du polynôme minimal ; par suite, le polynôme minimal est P_0.

c. Puisqu'on est en dimension finie, l'endomorphisme L est un automorphisme si et seulement si il est injectif, donc si et seulement si 0 n'est pas valeur propre ; cela équivaut donc à ($a \neq 0$ et $a \neq -n$).

Dans ce cas, on vient de voir que $L^2 - (2a+n)L + a(a+n)\mathrm{Id} = 0$, donc, en composant par L^{-1}, $L - (2a+n)\mathrm{Id} + a(a+n)L^{-1} = 0$ soit $L^{-1} = \dfrac{1}{a(a+n)}\big((2a+n)\mathrm{Id} - L\big)$. Autrement dit, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$L^{-1}(M) = \frac{1}{a(a+n)}\big((a+n)M - \mathrm{tr}(M)I_n\big)$$

10. Petites Mines (Capazza)

Exo I. Un calcul d'intégrale.

Exo II. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des complexes deux à deux distincts. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{C}$, on pose $P_i(x) = \displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} (x - a_j)$. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \cdots & \cdots & a_n^{n-2} \\ P_1(x) & \cdots & \cdots & P_n(x) \end{vmatrix}$$
pour tout $x \in \mathbb{C}$.

Corrigé

Exo II. Notons $\Delta(x)$ ce déterminant. Les polynômes P_i sont de degré $n-1$; en développant $\Delta(x)$ par rapport à la dernière ligne, on obtient une combinaison linéaire de ces polynômes ; $\Delta(x)$ est donc un polynôme en x de degré au plus $n-1$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$; calculons $\Delta(a_j)$. On a clairement $P_i(a_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. En développant $\Delta(a_j)$ par rapport à la dernière ligne, on voit donc que $\Delta(x)$ est égal à $(-1)^{n+j}P_j(a_j)$, multiplié par le déterminant Δ_j obtenu en supprimant ligne n et colonne j dans $\Delta(x)$.

Il est alors clair que Δ_j est le déterminant de Vandermonde de la famille $(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)$, et donc classiquement $\Delta_j = \displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k<l\leqslant n\\ k,l\neq j}} (a_l - a_k)$.

D'autre part, $P_j(a_j) = \displaystyle\prod_{k\neq j}(a_j - a_k)$. Ce produit contient $n-j$ termes tels que $k > j$; c'est donc, au facteur $(-1)^{n-j}$ près, le produit des facteurs manquants à Δ_j pour obtenir $\displaystyle\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n} (a_l - a_k) = V$, le déterminant de Vandermonde de la famille complète. Autrement dit, $\Delta(a_j) = (-1)^{n+j}(-1)^{n-j}V = V$.

Finalement, le polynôme Δ est de degré au plus $n-1$, et prend les mêmes valeurs que le polynôme constant V en n points : ces deux polynômes sont donc égaux. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad \Delta(x) = V = \prod_{1\leqslant k<l\leqslant n} (a_l - a_k)$$

11. ENSSAT (Marmisse)

Exo I. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $M_\alpha = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer son polynôme caractéristique.
b. La matrice est-elle inversible ?
c. Pour quelles valeurs de α, la matrice est-elle diagonalisable ?
d. La matrice M_2 est-elle semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Exo II. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\, dx$

a. Discuter la nature de l'intégrale en fonction de α.
b. Calculer I_1.

Corrigé

Exo I. a. On obtient immédiatement $\chi_{M_\alpha}(\lambda) = \lambda(\alpha-\lambda)(\lambda-2)$ pour tout λ, en développant par rapport à la deuxième ligne ; les valeurs proprs sont donc 0, 2 et α.

b. Puisque 0 est valeur propre, le noyau de la matrice n'est pas réduit à 0, et donc elle n'est pas inversible.

c. Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 2$, alors le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc la matrice est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$, alors 0 est valeur propre d'ordre 2 ; mais les deux premières colonnes de M_0 sont indépendantes, donc $\operatorname{rg} M_0 \geqslant 2$, et donc $\operatorname{Ker} M_0$ est au plus de dimension 1. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est donc strictement inférieure à l'ordre de cette valeur propre, la matrice n'est pas diagonalisable.
Le même argument, en examinant le rang de $M_2 - 2I_3$, montre que la matrice n'est pas diagonalisable pour $\alpha = 2$.

d. On cherche trois vecteurs U, V et W vérifiant $M_2U = 0$, $M_2V = 2V$ et $M_2W = V + 2W$. On voit sans difficultés qu'on peut par exemple prendre $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, donc que (U, V, W) est une base.
Par construction, l'endomorphisme canoniquement associé à M_2 a pour matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base (U, V, W) ; on a donc $P^{-1}M_2P = N$, les deux matrices sont semblables.

Exo II. a. Posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, $f(x)$ est équivalent à $\ln x$, qui est intégrable sur $]0, 1]$ et de signe constant, donc f est intégrable sur $]0, 1]$.
En $+\infty$, $f(x) \sim x^{-2\alpha} \ln x \geqslant 0$.

- ▷ Si $\alpha > 1/2$, soit $2\alpha > 1$, on peut choisir $\beta \in]1, 2\alpha[$; on a immédiatement $f(x) = o(x^{-\beta})$ en $+\infty$, et $x^{-\beta}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc f l'est aussi.
- ▷ Si $\alpha = 1/2$, $x^{-2\alpha} \ln x = x^{-1} \ln x$ a pour primitive $(\ln x)^2/2$ qui tend vers $+\infty$, donc $x^{-2\alpha} \ln x$ n'est pas intégrable ; f ne l'est donc pas non plus.
- ▷ Enfin, si $\alpha < 1/2$, alors $x^{-2\alpha} \ln x \geqslant x^{-1} \ln x \geqslant 0$, donc $x^{-2\alpha} \ln x$ n'est encore pas intégrable, et f non plus.

Finalement, f est intégrable si et seulement si $\alpha > 1/2$.

b. Grosse astuce : le changement $u = 1/x$ donne $I_1 = -I_1$, et donc $I_1 = 0$.

12. CCP (Capazza)

Exo I. (algèbre 26 de la banque) On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ la projection vectorielle f sur le plan d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite d d'équation $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

a. Trouvez simplement une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
b. Déduisez-en la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exo II. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$, et $f(0) = 0$.

a. Donner la représentation graphique de f. Préciser le type de convergence de la série de Fourier de f, ainsi que sa somme.
b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$ converge.
c. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Corrigé

Exo I. **a.** Les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, -1)$ sont dans le plan et sont clairement indépendants, donc en forment une base, et vérifient $f(u_i) = u_i$ puisqu'ils appartiennent à l'image de la projection f.
Le vecteur $u_3 = (1, 2, 3)$ est dans d, donc en forme une base, et vérifie $f(u_3) = 0$ puisqu'élément de la direction de la projection f.
On vérifie en calculant leur déterminant que (u_1, u_2, u_3) forme une base $\mathcal{C}$ de f ; dans cette base, la matrice de f est $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Les formules de changement de base montrent que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ est

$$A = PJ_2P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Exo II. **a.** Sur $]0, 2\pi[$, la courbe est le segment d'extrémités $(0, \pi/2)$ et $(2\pi, -\pi/2)$, privé de ces extrémités ; la courbe se répète par périodicité.
Le dessin montre que f est continue par morceaux et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Dirichlet montre que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de f, qui est f elle-même, grâce au choix astucieux de $f(0)$.
De plus, les sommes partielles de la série étant continues sur $\mathbb{R}$ alors que f ne l'est pas, la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.

b. La figure permet de constater que f est impaire (encore une fois grâce au choix judicieux de $f(0)$). On a donc $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; et le calcul donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt) f(t)\, dt = \frac{1}{n}$$

La première question donne donc $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = f(x).$

Remarque : si $f(0)$ n'avait pas été aussi bien choisi (par exemple $f(t) = (\pi - t)/2$ sur $[0, 2\pi[$), on se serait ramené à la situation de l'énoncé en modifiant $f(0)$, ce qui n'aurait pas modifié la valeur des coefficients de Fourier de f, ni la somme de la série.

c. Avec $x = \pi/2$, on a $\sin(nx) = \sin(p\pi) = 0$ si $n = 2p$ est pair, et $\sin(nx) = \sin(p\pi + \pi/2) = (-1)^p$ si $n = 2p + 1$ est impair. La relation précédente donne donc

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

relation classique, qui dit que la série entière de Arctan converge en 1, avec pour somme Arctan 1.

D'autre part, la formule de Bessel-Parseval (qui s'applique à toutes les fonctions 2π-périodiques continues par morceaux) donne ici

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 \quad \text{soit} \quad \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

qui donne immédiatement le $\zeta(2) = \pi^2/6$ bien connu.

13. CCP (Marmisse)

Exo I. (algèbre 46 de la banque) On considère la courbe définie en coordonnées polaires par $r = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$.

a. Étudiez les symétries éventuelles de cette courbe.

b. Donnez l'allure de cette courbe.

c. Précisez la tangente au point de paramètre $\theta = \pi/4$.

Exo II. Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^b}$ existe.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^{nb}\,dt$ existe ; calculer cette intégrale.

c. On cherche à montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{nb+1}$. Est-ce possible en utilisant :

i. le théorème d'interversion intégrale/somme ?

ii. le théorème de convergence dominée ?

Justifier la réponse.

d.

Corrigé

Exo I. a. Il y a déjà un problème de définition ; il faut que 2θ soit dans un $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, le domaine de définition est donc $D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$.

On a évidemment $M(\theta+2\pi) = M(\theta)$ pour tout $\theta \in D$; on peut donc étudier la courbe uniquement sur $D \cap \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

Pour tout $\theta \in D$, $\theta+\pi$ est dans D et $r(\theta+\pi) = r(\theta)$; donc $M(\theta+\pi)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à l'origine.

Enfin, pour tout $\theta \in D$, $-\theta$ est dans D et $r(-\theta) = r(\theta)$; donc $M(-\theta)$ est le symétrique de θ par rapport à l'axe Ox.

Finalement, pour tracer la courbe,

▷ on trace la courbe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$;

▷ on ajoute la courbe symétrique par rapport à Ox, ce qui donne la courbe sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$;

▷ on ajoute la courbe symétrique par rapport à O, ce qui donne toute la courbe.

b. On obtient un symbole ∞, ou un nœud papillon, centré à l'origine.

c. Vu en cours : la courbe ayant une équation de la forme $r = f(\theta)$, et passant par l'origine pour $\theta = \pi/4$, la tangente à la courbe en ce point fait automatiquement un angle de $\pi/4$ avec Ox. On le retrouve si nécessaire en calculant la limite du coefficient directeur de la droite $\big(OM(\theta)\big)$, coefficient qui vaut $y(\theta)/x(\theta) = \tan\theta$.

Exo II. a. Pas de problème : la fonction intégrée est définie et continue sur le segment $[0,1]$.

b. Même chose pour la définition ; l'intégrale vaut immédiatement $\left[\dfrac{t^{nb+1}}{nb+1}\right]_{t=0}^{1} = \dfrac{1}{nb+1}$.

c. Posons $f_n(t) = (-1)^n t^{nb}$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+t^b}$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1[$, on a $t^b \in [0,1[$, et donc $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ (série géométrique).

Compte tenu du **b.**, on veut donc montrer que $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$ en interprétant les intégrales comme des intégrales sur le semi-ouvert $[0,1[$.
Pour pouvoir appliquer le théorème d'interversion série/intégrale, il faut entre autres vérifier que la série $\sum \int_0^1 |f_n(t)|\,dt$ converge ; or, cette série est ici divergente, on ne peut donc pas utiliser ce théorème.
On va donc plutôt appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1[$, posons donc

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{kb}$$

On a alors :
- ▷ pour tout n, S_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$ (puisqu'en fait continue sur le segment $[0,1]$) ;
- ▷ la suite (S_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction f, elle-même continue par morceaux ;
- ▷ il est immédiat que, pour tout $t \in [0,1[$, la série $\sum f_n(t)$ vérifie les hypothèses du théorème sur les séries alternées ; on peut donc en particulier écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1[\quad S_1(t) \leqslant S_n(t) \leqslant S_0(t)$$

  et puisque $S_1(t) = 1 - t^b \geqslant 0$, on a finalement $|S_n(t)| \leqslant S_0(t) = 1$, la fonction constante 1 étant intégrable sur $[0,1[$.

Le théorème de convergence dominée montre donc que $\int_0^1 S_n(t)\,dt$ a pour limite $\int_0^1 f(t)\,dt$ quand n tend vers l'infini ; autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+kb} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^b}$$

ce qui constitue le résultat demandé.