Spéciales MP* – 20/21

Exercices posés à l'oral des Mines en 2019

Algèbre générale

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Caractériser et dénombrer les inversibles de $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$.

b. Soient $x \in \mathbb{Z}$ impair et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner deux algorithmes de calcul de l'inverse de x modulo 2^n, le premier utilisant la suite $(\overline{x}^{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$, le second résolvant successivement, pour $k = 1, 2, \ldots, n$ la congruence $y_k x \equiv 1\ [2^k]$.

2. a. Soit φ un isomorphisme du groupe G dans le groupe H. Montrer que x est un générateur de G si et seulement si $\varphi(x)$ est un générateur de H.

b. Montrer que, si G est un groupe monogène, alors tous ses sous-groupes sont monogènes.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, .)$.

4. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, tel que I_2 soit le seul élément de G de déterminant 1. Montrer que G est cyclique.

5. Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. Soit $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

a. Décomposer $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simples.

b. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{P''(z_k)}{P'(z_k)}$.

6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, tel que $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geqslant 0$. Soit $Q = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$.
Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x) \geqslant 0$.

7. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, A une partie finie de $\mathbb{C}$. On note $|B|$ le cardinal d'un ensemble fini B.

a. Montrer que $\quad |P^{-1}(A)| \leqslant n|A|$.

b. Quel est le degré de $P \wedge P'$?

c. Montrer que $\quad |P^{-1}(A)| \geqslant n(|A| - 1) + 1$.

Algèbre linéaire élémentaire

8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n ; soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$.

a. Montrer que $\quad \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leqslant n$.

b. Montrer que $\quad 2\,\mathrm{rg}(u^2) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ non constante, telle que $\quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad f(AB) = f(A)f(B)$.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

10. On dit que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation s'il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que, pour tout (i, j), $a_{ij} = 1$ si $i = \sigma(j)$, $a_{ij} = 0$ sinon ; c'est alors la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui transforme chaque e_i en $e_{\sigma(i)}$, en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique.
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

11. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$; soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\quad p + \mathrm{rg}(I_n + AB) = n + \mathrm{rg}(I_p + BA)$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; soit $E = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\big|\, AMB = 0\big\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.

Réduction des endomorphismes

13. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$; on suppose f inversible et g de rang 1. Montrer que $f+g$ est inversible si et seulement si $\operatorname{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

14. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a. Si $\operatorname{Vect}(u,v)$ contient un endomorphisme inversible, montrer que $(\operatorname{Ker} u) \cap (\operatorname{Ker} v) = \{0_E\}$.

b. Montrer que la réciproque du résultat établi en **a** est fausse.

c. On suppose $(\operatorname{Ker} u) \cap (\operatorname{Ker} v) = \{0_E\}$ et $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\operatorname{Vect}(u,v)$ contient un endomorphisme inversible.

15. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A^2 + tI_n) \geqslant 0$.

b. On suppose ici n impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

16. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 soit un projecteur.

a. Montrer que f est trigonalisable.

b. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable. On pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ et $C'(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall B \in C(A) \quad BM = MB\}$.

a. Déterminer la dimension de $C(A)$. A-t-on forcément $C(A) = \mathbb{R}[A]$?

b. Déterminer la dimension de $C'(A)$. Comparer $C'(A)$ et $\mathbb{R}[A]$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que A soit diagonalisable et $BA^3 = A^3B$. Montrer que $AB = BA$.

19. **a.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

b. Montrer que le résultat peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus A diagonalisable.

20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

21. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun dans chacun des cas suivants.
- $u \circ v = 0$.
- $u \circ v \in \operatorname{Vect} u$.
- $u \circ v \in \operatorname{Vect}(u,v)$.

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^3 + A = 10I_n\}$. Donner l'image de E par l'application det.

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Calculer $\exp(A)$ si $A^3 = A^2$.

b. Calculer $\exp(A)$ si $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$.

24. Soient $a \in]0,1[$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & a \\ 1-a & a & 0 \end{pmatrix}$. Étudier la convergence de la suite (A^n).

Espaces euclidiens

25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

a. $X + {}^tX = \operatorname{tr}(X)A$; **b.** $X - {}^tX = \operatorname{tr}(X)A$; **c.** $X + {}^tX = \operatorname{tr}(BX)A$

26. Soit E un espace euclidien ; soient a et b deux vecteurs non nuls de E. Soit $f : x \in E \setminus \{0\} \longmapsto \dfrac{(a|x)(b|x)}{\|x\|^2}$.
Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de f.

27. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. On suppose de plus que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} (e_k \,|\, x)^2$. Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E.

28. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXMX = 0$.

29. Soit E un espace euclidien ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\forall x \in E \quad \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

30. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient $A_1, \ldots, A_p$ dans $S_n(\mathbb{R})$; donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que les matrices A_i soient toutes dans $\mathbb{R}[A]$.

31. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, antisymétrique. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et que ses valeurs propres sont imaginaires pures.

32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. On suppose dans cette question qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A = ST$. Montrer que A est diagonalisable.

b. Montrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = SAS^{-1}$.

Espaces vectoriels normés

33. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et C une partie convexe de E. Montrer que l'intérieur et l'adhérence de C sont convexes.

34. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et C une partie convexe de E. Soit $D \subset E$ telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient (A_p) et (B_p) deux suites d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergentes de limites respectives A et B

a. Si A_p est semblable à B_p pour tout p, A est-elle forcément semblable à B ?

b. Que dire si A_p est orthogonalement semblable à B_p pour tout p ?

36. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé ; soit K un compact non vide de E. Soit $f : K \longrightarrow K$ telle que $\forall (x,y) \in K^2 \quad x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

a. Montrer que f admet un unique point fixe c dans K.

b. Soit (x_n) une suite d'éléments de K vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n. Montrer que (x_n) converge vers c.

Suites et séries numériques

37. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_n^2 - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Peut-on en déduire que :

a. si (u_n) ne tend pas vers 0, alors elle tend vers 1 ?

b. (u_n) est bornée ?

c. $u_n^3 - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$?

38. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs, telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \dfrac{1 + u_n}{2 + u_n}$. Montrer que (u_n) tend vers 0. Étudier le comportement asymptotique de (u_n).

39. Soit (u_n) une suite à termes réels, telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

40. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs, telle que $n(u_n + u_{2n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Étudier la convergence de la suite (nu_n).

41. Déterminer deux réels a et b tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) \underset{n \to +\infty}{=} n \ln n + an + b + o(1)$.

42. Dans chaque cas, étudier la convergence de la série $\sum a_n$.

a. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \exp\left(\dfrac{nz}{z-2}\right)$ où $z \in \mathbb{C}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^\alpha}$ où $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1/2$.

43. **a.** Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2 \quad a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor}$.

b. Étudier la convergence de $\sum a_n^{-2}$.

44. Soient (u_n) une suite complexe périodique et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$.

a. On suppose $\alpha > 1$; montrer que $\sum a_n$ converge.

b. *(rajouté par moi)* Soient (b_n) et (c_n) deux suites complexes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$.

Montrer que $\forall n \geqslant 2 \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k c_k = \sum_{k=1}^{n-1} B_k(c_k - c_{k+1}) + B_n c_n.$

c. Dans le cas $\alpha \in]0,1]$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum a_n$ converge.

45. Soit f une fonction continue et croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

a. On suppose $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^n f(t)\,dt$.

b. Ce résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$?

46. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\omega(n) = \min\{p \in \mathbb{N}^* \mid H_p \geqslant n\}$.

Déterminer un équivalent de $\omega(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

47. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\varphi(n)$ l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\varphi(n)} + 2^{-\varphi(n)}}{2^n}$.

48. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\left[2^n\big(\zeta(n)-1\big)-1\right]$ où $\zeta(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ pour tout $n \geqslant 2$.

Analyse élémentaire

49. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a. Montrer que (u_n) a pour limite 0.

b. Si f est dérivable en 0, que dire de la suite (u_n) ?

50. Soit f une fonction dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; on suppose de plus que $\big(f(x), f'(x)\big) \neq (0,0)$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que l'ensemble des zéros de f est fini.

Intégration

51. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\varphi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)}$. Déterminer l'ensemble $\varphi(E)$.

52. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2(nt)}\,dt$. Déterminer la limite de la suite (I_n).

53. a. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)-\cos(na)}{\cos t - \cos a}\,dt$.

b. Déterminer une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite (I_n).

c. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

54. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^\alpha \sin^2 x}$.

55. Pour a et b dans $\mathbb{R}_+^*$, convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$.

56. a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Quelle est la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\big(P(x)\big)\,dx$?

b. Donner le signe de I si $P = X^2$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

57. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+|t|} f(t-n)\,dt$. Étudier la convergence de la suite (I_n).

58. Prouver qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t(1+t^x)}\,dt$ converge et soit égale à 0.

59. **a.** Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F ; en déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b. Soit $G : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

c. Trouver la limite de $xG(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

60. Donner le domaine de définition de $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t}\,dt$, puis donner une expression simple de $g(x)$ pour tout x.

Suites et séries de fonctions

61. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose trouvé $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big|f(x+y)-f(x)-f(y)\big| \leqslant M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $h_n(t) = 2^{-n}f(2^n t)$.

a. Montrer que la suite de fonctions (h_n) converge vers une fonction h continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad h(x+y) = h(x)+h(y)$.

c. Montrer que $f-h$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire que f est la somme d'une homothétie et d'une fonction bornée. A-t-on unicité de cette décomposition ?

62. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \longmapsto \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(x+\frac{k}{n}\Big)$.

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment.

63. Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}}\,dt$ et $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. Justifier l'existence de I et S, puis exprimer I en fonction de S.

64. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\,dt$.

b. Montrer qu'il n'existe pas de partie I de $\mathbb{N}$ telle que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in I}\frac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$.

65. **a.** Soit $S : t \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$. Déterminer le domaine de définition de S et étudier sa continuité.

b. Déterminer la limite et un équivalent éventuel de S en 0^+ et $+\infty$.

Séries entières

66. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n\,dt$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum I_n x^n$.

b. Étudier la convergence de cette série en R et $-R$.

c. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ pour tout $x \in \,]-R,R[$.

67. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)}{n}t^n$.

b. Calculer sa somme pour $t \in \,]-R,R[$.

68. **a.** Donner le développement en série entière de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

69. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; soit $f : t \longmapsto (1+t)^\alpha$.

a. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, et préciser son développement ; on le note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

b. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{\alpha+1}}$.

c. La série $\sum a_n$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

70. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

a. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

b. (*Rajouté par moi, mais j'ai peut-être raté quelque chose de plus simple ; essayer d'abord de résoudre la question suivante sans utiliser celle-ci.*)
Étudier la suite de terme général $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$; en déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

c. Étudier la convergence de la série en R et $-R$.

d. Donner un équivalent de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ quand x tend vers R^-.

Équations différentielles

71. On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' - xy = 1$.

a. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

b. Montrer que $f : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} e^{x \sin t}\, dt$ est solution de (E).

c. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

72. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soient (E) l'équation différentielle $y'' + \big(1 + u(t)\big)y = 0$, et f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)\, dt$.

a. Former une équation différentielle linéaire vérifiée par g.

b. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f(x)| \leqslant C + \int_0^x |u(t)f(t)|\, dt$.

c. Montrer que f est bornée.

73. Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $(E) : y'' + q(t)y = 0$.

a. On suppose trouvée une solution f de (E) bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. Montrer que (E) a des solutions non bornées.

74. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe une unique fonction $M \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big)$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R} \quad M'(t) = SM(t)S$ et $M(0) = I_n$.

75. Soient a et b deux fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $f \in E \setminus \{0\}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+1) = \lambda f(t)$.

76. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $C = AB - BA$, et on suppose que A et B commutent avec C. Enfin, pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \exp(tA)\exp(tB)\exp\Big(-\dfrac{t^2}{2}C\Big)$.

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad A^kB - BA^k = kA^{k-1}C$.

b. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

c. Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)\exp(-C)$.

Fonctions de plusieurs variables

77. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.

a. On suppose que $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad f(tx) = t^\lambda f(x)$.

Montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lambda f(x)$.

b. Prouver la réciproque de la propriété établie en **a**.

78. Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, vérifiant $\big(x \,|\, f(x)\big) > 0$ pour tout $x \neq 0_E$. Soit $u \in E$. Pour tout $x \in E$, on pose $F(x) = \big(x \,|\, f(x)\big) - 2\big(u \,|\, x\big)$.

a. Montrer que F est de classe C^1 sur E et préciser sa différentielle.

b. Montrer que F admet un minimum global sur E, en un point x_0 que l'on précisera.

79. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On identifie classiquement les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalences des deux propriétés suivantes :

i. il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = Ax + b$;

ii. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne de f en x est antisymétrique.

On pourra étudier les fonctions $\quad d_{i,j,k} = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$.

80. Soit E un espace euclidien.

a. Soit $S = \big\{x \in E \,|\, \|x\| = 1\big\}$ la sphère unité de E. Soit U un ouvert contenant S ; soit f une fonction de classe C^1 sur U.

On suppose que la restriction de f à S présente un extremum en un point x_0. Montrer que le gradient de f en x_0 est colinéaire à x_0.

b. Soit u un endomorphisme symétrique de E. Appliquer ce qui précède à $f : x \longmapsto \big(x \,|\, u(x)\big)$; en déduire une nouvelle démonstration du théorème spectral.

Probabilités

81. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2N$ boules blanches et N boules noires. On effectue des tirages avec remise ; on note X le nombre de tirages nécessaire pour obtenir deux boules blanches consécutives. On pose enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(X > n)$.

a. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

b. Déterminer la loi de X.

c. Montrer que X admet un moment à tout ordre ; calculer $E(X)$ et $V(X)$.

82. Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables mutuellement indépendantes et suivant la même loi, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$; justifier l'existence de $E\left(\dfrac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}\right)$ et la calculer.

83. On considère n expériences de Bernoulli indépendantes, ayant les probabilités de succès $p_1, \ldots, p_n$ respectivement. Soit N le nombre d'expériences ayant réussi.

a. Déterminer $E(N)$ et $V(N)$.

b. Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. On impose $E(N) = m$; comment choisir les p_i pour que $V(N)$ soit maximale ?

84. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un même espace (Ω, T, P), X_i suivant pour tout i la loi binômiale $\mathcal{B}(m_i, p_i)$. Soit $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

Montrer que S suit une loi binômiale si et seulement si les p_i sont tous égaux.

85. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes sur un même espace (Ω, T, P), suivant toutes la même loi $\mathcal{L}_1$ (respectivement $\mathcal{L}_2$). On suppose de plus que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ ont un moment d'ordre 2, et que $\quad E(X_0) \neq E(Y_0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n X_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n Y_k$. Étudier la convergence de la suite $\big(P(S_n < T_n)\big)$.

Indications

1. b. Pour le premier : Euler donne $x^{2^{n-2}} \equiv 1\ [2^n]$, donc l'ordre de $\overline{x}$ est un 2^k, et son inverse est $\overline{x}^{2^k-1} = \overline{x}.\overline{x}^2.\overline{x}^{2^2}\ldots\overline{x}^{2^{k-1}}$. Pour le deuxième, noter que $y_{k+1} \equiv y_k\ [2^k]$; une fois y_k déterminé, on n'a donc que deux possibilités pour y_{k+1}.

2. b. Par la première question, on peut travailler dans $\mathbb{Z}$ si G est infini, dans le groupe $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité si G est fini de cardinal n. Dans le cas fini, étudier l'ordre des éléments du sous-groupe considéré.

3. Les transpositions vérifient $\tau\circ\tau = \mathrm{Id}$. Montrer qu'elles ont toutes même image par le morphisme, en montrant que, si τ et τ' sont deux transpositions, alors il existe une permutation σ telle que $\tau' = \sigma^{-1}\circ\tau\circ\sigma$.

4. Montrer que le déterminant réalise un isomorphisme de G dans un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, .)$.

5. b. Adapter le **a** à P''/P', et permuter les sommes.

6. Étudier $f : x \longmapsto e^{-x}Q(x)$.

7. c. Si $P(x) - a_i$ a une racine multiple x, déterminer le nombre d'éléments en moins dans $P^{-1}(A)$ en fonction de la multiplicité de la racine x dans P'.

8. b. Appliquer la formule du rang à la restriction de u à $\mathrm{Im}\,u$ pour relier $\mathrm{rg}(u^2)$ et $\mathrm{rg}(u)$; noter que $\mathrm{Im}\,u^2$ est inclus dans le noyau de cette restriction.

9. Utiliser le caractère non constant pour prouver $f(I_n) \neq 0$ et $f(0) = 0$. Pour le cas M non inversible, montrer que M est équivalente à une matrice nilpotente.

10. En utilisant des matrices de transpositions, montrer que, pour une telle matrice, les coefficients diagonaux sont tous égaux, et les coefficients non diagonaux sont tous égaux. Pour la réciproque, noter qu'une telle matrice s'écrit $\lambda I_n + \mu J$, où les coefficients de J valent tous 1.

11. Il s'agit en fait de montrer que les sous-espaces propres associés à la valeur propre -1 des matrices AB et BA, ont la même dimension. Montrer que $X \longmapsto BX$ réalise un isomorphisme de l'un dans l'autre.

12. Pour la dimension, passer aux applications linéaires associées : on veut $g(\mathrm{Im}\,f) \subset \mathrm{Ker}\,h$, écrire la matrice de g dans une base adaptée à $\mathrm{Im}\,f$ au départ, et une base adaptée à $\mathrm{Ker}\,h$ à l'arrivée.

13. $f+g$ est inversible si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de $g\circ f^{-1}$; quel est le rang de $g\circ f^{-1}$?

14. b. Considérer $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$. **c.** On suppose $\mathrm{Ker}(u-\lambda v) \neq \{0\}$ pour tout λ. Ce noyau est stable par v, donc contient un vecteur propre pour v, forcément associé à une valeur propre non nulle. Montrer que cela conduit à une infinité de valeurs propres pour u.

15. a. $A^2 + tI_n = (A + i\sqrt{t}I_n)(A - i\sqrt{t}I_n)$. **b.** Si $A^2 + B^2 = I_n$, alors $A^2 + tI_n = -[B^2 + (1-t)I_n]$ pour tout $t \in [0,1]$.

16. b. $E = \mathrm{Ker}\,f^2 \oplus \mathrm{Ker}(f^2 - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,f^2$ est stable par f ; quels sont les vecteurs propres de f dans $\mathrm{Ker}\,f^2$?

17. a. Passer aux endomorphismes. Les éléments de $C(f)$ sont les endomorphismes qui laissent stables les sous-espaces propres de f ; écrire leur matrice dans une base de diagonalisation pour avoir la dimension. La dimension est strictement plus grande que celle de $\mathbb{R}[A]$ si une valeur propre est multiple. **b.** Prendre $B \in C(A)$ ayant n valeurs propres distinctes ; si $M \in C'(A)$, la restriction à chaque sous-espace propre est une homothétie.

18. Montrer que les sous-espaces propres de A sont stables par B.

19. a. Dans le cas A diagonale, chercher M diagonale. **b.** Penser à l'équation $X^2 = N$ où N est nilpotente d'indice n.

20. Chercher les vecteurs propres de B sous la forme $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$; un sous-espace propre de dimension p de A donne deux sous espaces propres de même dimension pour B, sauf si…

21. a. $\mathrm{Im}\,v \subset \mathrm{Ker}\,u$ et $\mathrm{Im}\,v$ est stable par v, donc contient un vecteur propre si $v \neq 0$. **b.** $u\circ v = \alpha u \implies u\circ(v - \alpha\mathrm{Id}_E) = 0$. **c.** $u\circ v = \alpha u + \beta v \implies (u - \beta\mathrm{Id}_E)\circ(v - \alpha\mathrm{Id}_E) = \cdots$.

22. Les matrices E sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec comme valeurs propres 2, $-1+2i$ et $-1-2i$, les deux dernières de même multiplicité, donc un déterminant de la forme $2^{n-2k}5^k$. Pour prouver que l'on obtient toutes ces valeurs, il suffit de trouver un bloc $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ semblable à $\begin{pmatrix}-1+2i&0\\0&-1-2i\end{pmatrix}$.

23. a. $A^n = A^2$ pour tout $n \geqslant 2$. **b.** La suite (A^n) vérifie la récurrence $U_{n+2} + U_{n+1} - 2U_n = 0$ à partir du rang 2 ; trouver β, γ, B, C tels que $A^n = \beta^n B + \gamma^n C$ pour tout $n \geqslant 2$.

24. A a trois valeurs propres simples, 1 et deux valeurs opposées dans $]-1,1[$; A^n a donc pour limite la projection sur la droite propre pour 1, de direction la somme des deux autres droites propres. Comme A est symétrique, c'est en fait une projection orthogonale.

25. Dans les trois cas, décomposer X en somme d'une symétrique et d'une antisymétrique. Pour **c**, noter que $\mathrm{tr}(BX) = 0$ définit l'hyperplan orthogonal à ${}^tB$ pour le produit scalaire usuel.
26. Se ramener au cas x, a, b unitaires. Utiliser $\alpha\beta = \dfrac{1}{4}[(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2]$ et noter que $(a+b|a-b) = 0$ si $\|a\| = \|b\|$.
27. On obtient le caractère orthogonal en prenant $x = e_i$. Pour le côté générateur, considérer le sous-espace F engendré et $x \in F^\perp$.
28. Appliquer la relation à $X+Y$ pour obtenir ${}^tYMX = -{}^tXMY$.
29. Si $x \neq 0_E$ est dans l'intersection et $x = f(y) - y$, exprimer $f^n(y)$ en fonction de x et y pour obtenir une contradiction.
30. Une première CNS est qu'il existe P orthogonale telle que toutes les $P^{-1}A_iP$ soient diagonales, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée constituée de vecteurs qui sont propres pour tous les endomorphismes associés : si les A_i sont dans $\mathbb{R}[A]$, prendre P qui diagonalise A ; s'il existe P, prendre $A = P\mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)P^{-1}$.

Une autre CNS est que $\forall (i,j) \quad A_iA_j = A_jA_i$. Pour le sens difficile, montrer par récurrence sur p que cette condition entraîne qu'il existe une base commune de diagonalisation, en notant que les intersections de sous-espaces propres de différents A_i sont stables par chaque A_j.
31. Montrer que A^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres négatives ; vérifier ensuite que $\mathrm{Ker}\, A^2 = \mathrm{Ker}\, A$. Penser à utiliser les expressions ${}^tXA^2X$ où X est une colonne.
32. a. Soit R symétrique telle que $R^2 = S$; ST est semblable à RTR symétrique. **b.** Si $A = PDP^{-1}$, alors ${}^tA = {}^tP^{-1}P^{-1}AP{}^tP$. Si ${}^tA = SAS^{-1}$, alors RAR^{-1} est symétrique avec les notations précédentes.
34. Si $a \in D \setminus C$, considérer une suite (c_n) d'éléments de C de limite a. On obtient un chemin continu de c_0 à a en réunissant les segments $[c_nc_{n+1}]$; pour paramétrer ce chemin, paramétrer le n-ième segment par $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ où (α_n) est une suite croissant dans $[0,1]$ de limite 1.
35. a. Prendre $A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_p = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **b.** Si $Q_p^{-1}A_pQ_p = B_p$ et Q_p orthogonale pour tout p, on peut extraire de (Q_p) une suite convergente (car $O_n(\mathbb{R})$ est...) ; ne pas oublier de justifier que la limite est inversible.
36. a. $x \longmapsto \|f(x) - x\|$ atteint son minimum sur K en un point c. **b.** La suite $\|x_n - c\|$ converge vers un réel d ; si $d \neq 0$, obtenir une contradiction en extrayant de (x_n) une suite convergente.
37. b. Si elle n'est pas bornée, on peut en extraire une suite vérifiant $|u_{\varphi(n)} \longrightarrow +\infty$. **c.** $u_n^3 - u_n = u_n^3 - u_n^2 + u_n^2 - u_n$.
38. Pour l'équivalent, montrer que la série $\sum u_n$ converge, puis étudier $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, pour prouver qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim C/2^n$.
39. Poser $v_n = e^{u_n}$ et appliquer la sommation des équivalences à $v_{n+1} - v_n$ pour obtenir un équivalent de v_n. Répéter jusqu'à avoir un développement de v_n suffisant pour conclure.
40. Poser $a_n = nu_n$ et $b_n = a_n + (a_{2n}/2)$. Exprimer a_n en fonction des b_{2^kn} sous forme d'une série ; utiliser des ε pour majorer la distance entre a_n et la somme de la série obtenue en remplaçant les b_p par 1.
41. Les deux premiers termes s'obtiennent par comparaison à une intégrale. Pour b, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne $\left|\ln t - \ln p - \dfrac{t-p}{p}\right| \leqslant \dfrac{1}{2(p-1)^2}$ pour $t \in [p-1, p]$. En déduire une évaluation de $\int_{p-1}^p \ln t\, dt - \ln p$.
42. a. $|e^{nu}| = \exp(-n\mathrm{Re}(u))$, donc $\sum e^{nu}$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(u) < 0$.
43. b. Expliciter les a_n, en déduire que $a_n \geqslant n/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
44. a. (u_n) est bornée. **c.** Appliquer **b** avec $b_n = u_n$. En notant M la valeur moyenne de la suite u_n $(M = (u_1 + \cdots + u_T)/T)$, montrer que $B_n \sim nM$ si M est non nulle, et B_n est bornée sinon.
45. a. Montrer $f(k) \sim \int_{k-1}^k f$ et utiliser la sommation des comparaisons, en notant que $\sum f(k)$ diverge. **b.** Prendre $f(x) = e^x$.
46. Utiliser la comparaison à une intégrale pour encadre $\omega(n)$.
47. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, regrouper tous les termes vérifiant $\varphi(n) = k$; on obtient une somme télescopique.
48. Noter que $2^n\big(\zeta(n) - 1\big) - 1 = \displaystyle\sum_{k \geqslant 3} \frac{2^n}{k^n}$ et intervertir les sommes.
49. a. Majorer $|u_n|$ à l'aide de $M_n = \sup\big\{|f(t)|; t \in [0, 1/n]\big\}$. **b.** Utiliser un DL_1 de f pour obtenir un équivalent de u_n (si $f'(0) \neq 0$) ; en écrivant le $o(t)$ sous la forme $t\varepsilon(t)$, on est ramené à une situation analogue au **a.**

50. S'il y a une infinité de zéros, on peut construire une suite convergente de zéros deux à deux distincts ; la limite contredit l'hypothèse $\big(f(x), f'(x)\big) \neq (0,0)$.
51. Cauchy-Schwartz montre que le minimum de φ est atteint pour f constante. Prendre f de la forme $x \longmapsto x - c$ avec $c < a$ et "proche de a" pour obtenir $\varphi(f)$ aussi grand que l'on veut.
52. Poser $u = nt$. Dans chaque intégrale sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, remplacer $\sin(u/n)$ par $\sin(k\pi/n)$, en justifiant que l'erreur globale tend vers 0. Noter que $\cos^2$ est π-périodique.
53. a. Se ramener au cas $a \in [0, \pi]$, DL en a et na à l'ordre 1 ou 2 suivant que $a \in]0, \pi[$ ou non ; la fonction est prolongeable par continuité. **b.** Utiliser la relation de récurrence des polynômes de Tchebychev.
54. Pour $\alpha > 0$, découper en $\sum \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$. Encadrer chaque intégrale par des $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{a_n}{1+b_n \sin^2 t}\, dt$. Découper cette intégrale en 2 par symétrie, et la calculer en posant $u = \tan t$. Il faut justifier que la convergence de l'intégrale de départ équivaut à la convergence de la série.
55. On a $\displaystyle\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\, du.$
56. a. Il vaut mieux se ramener au cas $P(x) \longrightarrow +\infty$ en $+\infty$ pour simplifier. Montrer que, sur un intervalle $[a, +\infty[$, on peut faire le changement de variable $u = P(x)$; faire une intégration par parties dans l'intégrale obtenue. On pourra montrer que $P^{-1}(x)$ a un équivalent de la forme $\lambda x^{1/n}$ en $+\infty$. **b.** Après avoir posé $u = x^2$, découper en $I = \sum \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$ et montrer que la série vérifie les hypothèses du TSSA.
57. Poser $u = t - n$, puis convergence dominée.
58. Montrer que l'intégrale est une fonction continue de x, définie sur $\mathbb{R}$; étudier les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
59. c. Il faut trouver un équivalent de l'intégrale : pour cela, on peut intégrer par parties, ou chercher H telle que $H'(t) \sim e^{t^2}$, et utiliser l'intégration des comparaisons.
60. Dériver g.
61. a. Montrer que la série $\sum(h_{n+1} - h_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$; on notera que $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. **c.** $h - f = \sum_{n=0}^{+\infty}(h_{n+1} - h_n)$. **d.** C'est un exercice classique (et fait en cours) de montrer que **b** + continuité entraînent que h est une homothétie : avec $a = h(1)$, on montre d'abord que $h(r) = ar$ pour tout rationnel r, puis on conclut par densité.
62. Il faut revenir aux ε, et utiliser le fait que f est uniformément continue sur chaque segment : majorer $\left|\frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right) - \int_{x+k/n}^{x+(k+1)/n} f(t)\, dt\right|$ par ε/n pour n assez grand.
63. Changement de variable $u = \sqrt{1+t}$, puis écrire $1/(u^2 - 1)$ comme somme d'une série après avoir mis u^2 en facteur.
64. b. Si I est infini, utiliser **a** pour montrer que $e^{-x} f(x)$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.
65. b. En 0^+ : comparaison à une intégrale. En $+\infty$: le premier terme domine le reste, le mettre en facteur et chercher la limite de ce qui reste.
66. a. Poser $u = \tan t$, l'intégrale obtenue peut facilement être encadrée par deux termes en $1/n$; cela permet aussi de répondre au cas $x = R$ du **b.** **c.** Intervertir intégrale et somme, et poser $u = \tan t$ pour se ramener à une fraction rationnelle.
67. a. C'est aussi le rayon de $\sum \sin(na) t^n$. Si a n'est pas de la forme $k\pi$, montrer que $\sin(na)$ ne tend pas vers 0 en considérant $\sin(n+1)a$; cela permet de majorer le rayon. **b.** Commencer par calculer $\sum \sin(na) t^n$ en utilisant les complexes.
68. a. En prévision du **b**, il faut faire apparaître les coefficients du binôme $\binom{2n}{n}$. **b.** C'est le coefficient de x^n dans le développement de $(1-x)^{-3/2}$ obtenu de deux manières : produit de Cauchy ou dérivation.
69. b. Il faut montrer que la suite de terme général $u_n = \ln|a_n| + (\alpha+1)\ln n$ converge ; étudier la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$. **c.** Pour $\alpha > -1$, prouver la convergence uniforme de la série sur $[0, 1[$; utiliser le TSSA dans le cas $\alpha \in]-1, 0]$.
70. a. Montrer que a_n tend vers 0, puis d'Alembert. **b.** Une fois trouvée une limite finie à la suite, utiliser la sommation des comparaisons. **d.** Reprendre le **b.** en poussant un cran plus loin le développement. Considérer $\sum a_n x^n - \sum 2x^n/n$.
71. b. Partir de l'expression de f', et intégrer par parties.
72. a. Commencer par développer le sinus. On trouve $g'' = -g$. **c.** Introduire $G : x \longmapsto \int_0^x |u(t) f(t)|\, dt$ et $U : x \longmapsto \int_0^x |u(t)|\, dt$. Multiplier la relation précédente par $|u| e^{-U}$ pour faire apparaître une dérivée.
73. a. L'équation montre que f'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc que f' a une limite finie en $+\infty$. **b.** Si f_1 et f_2 sont deux solutions de (E), montrer que leur wronskien est constant.
74. Écrire $S = PD\,{}^tP$ avec P orthogonale et D diagonale, et introduire $N = {}^tPMP$.
75. L'application qui, à $f \in E$, associe la fonction $t \longmapsto f(t+1)$, est un endomorphisme de l'espace E.

76. a. Récurrence, en utilisant $A^{k+1}B - BA^{k+1} = A(A^kB - BA^k) + CA^k$. **b.** Remplacer A par tA dans la relation précédente, en déduire que $\exp(tA)B = B\exp(tA) + \exp(tA)C$. On trouve $f'(t) = (A+B)f(t)$.
77. a. Dériver l'hypothèse par rapport à t. **b.** Dériver $t^{-\lambda}f(tx)$.
78. a. La différentielle en x est $h \longmapsto 2\big(f(x) - u \,|\, h\big)$ en exploitant la symétrie ; autrement dit, le gradient en x est $2\big(f(x) - u\big)$. **b.** f est bijective, donc F a un unique point critique x_0. Calculer $F(x_0 + h)$.
79. Pour **ii** $\Longrightarrow$ **i**, on notera que **ii** implique $d_{i,j,k} = -d_{j,i,k} = -d_{k,j,i}$ puisque f est C^2, et jouer avec les indices pour prouver que les $d_{i,j,k}$ sont toutes nulles.
80. a. Pour a unitaire et orthogonal à x_0, étudier $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto f\big((\cos t)x_0 + (\sin t)a\big)$. **b.** Le **a** donne un vecteur propre unitaire ; on se ramène ensuite à un espace de dimension $\dim E - 1$ en utilisant le fait que l'orthogonal de la droite stable trouvée est aussi stable par u.
81. a. On trouve $u_{n+2} = u_{n+1}/3 + 2u_n/9$. **b.** $P(X = n) = u_{n-1} - u_n$.
82. Pour l'existence, variable bornée. Pour le calcul, il suffit d'obtenir $E(X_i/(X_1 + X_2 + \cdots + X_n))$; quelle est la somme de ces nombres ?
83. a. N est évidemment une somme de variables de Bernoulli indépendantes. **b.** Exprimer $V(N)$ en fonction de $\sum p_i^2$, minorer cette somme à l'aide de Cauchy-Schwarz.
84. Utiliser les fonctions génératrices.
85. Utiliser la loi faible des grands nombres.