

Spéciales MP* – 20/21 – Préparation à l'oral

Sauf mention contraire, les énoncés qui suivent ont été posés à l'oral CC INP-MP en 2019.

Algèbre générale

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de corps.
 - a. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. En déduire que f est croissante.
 - b. Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que $f(nx) = nf(x)$.
 - c. Soit $x \in \mathbb{Q}$, montrer que $f(x) = x$.
 - d. Montrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.
2. (IMT PSI) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $n \geq 2$; soit $z = \exp(2i\pi/n)$.
 - a. Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donner le module et un argument de $z^k - 1$.
 - b. Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} |z^k - 1| = \cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.
3. (IMT MP) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
 - a. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
 - b. Comparer la moyenne arithmétique des racines de P à celle des racines de P' .
4. (IMT MP) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\{0, 1\}$, telles qu'il n'y ait qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne.
 - a. Montrer que $(P_n, \cdot)$ est un groupe fini.
 - b. Montrer que toute matrice de P_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Algèbre linéaire élémentaire

5. Soit E un espace vectoriel de dimension n ; soient p et q deux projecteurs de E .
 - a. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
 - b. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.
6. (CC INP - PSI) Soit E un espace vectoriel de dimension finie; soient p et q deux endomorphismes de E , vérifiant $p + q = \text{Id}_E$ et $\text{rg } p + \text{rg } q \leq \dim E$. Montrer que p et q sont des projecteurs.
7. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, nilpotent d'indice p , c'est-à-dire tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$; soit A la matrice de u dans la base canonique.
 - a. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ soit libre.
Qu'en déduit-on sur p ?
 - b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que A soit semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - c. On suppose ici $p = 2$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1.
 - a. Montrer que A est semblable à une matrice B du type $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. En déduire que $A^2 = \text{tr}(A)A$.
 - b. En déduire une expression de $\exp(A)$, puis de $\exp(B)$.
9. (ENSEA - PSI) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M .
 - a. Déterminer la nature de f , et ses éléments caractéristiques.

- b. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telles que $M = BA$.
- c. Montrer que, pour tout couple (A, B) solution de **b.**, on a $AB = I_2$.
10. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non constante, vérifiant $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad f(AB) = f(A)f(B)$.
- a. Calculer $f(I_n)$.
- b. Montrer que, si A est une matrice inversible, alors $f(A) \neq 0$.
- c. Montrer que, si A et B sont semblables, alors $f(A) = f(B)$.
- d. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq r \leq n-1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r .
- i. Montrer que, si $f(A) \neq 0$, alors $f(B) \neq 0$ pour toute matrice B telle que $\text{rg}(B) = r$.
- ii. Montrer que, si $f(A) \neq 0$, alors $f(B) \neq 0$ pour toute matrice B telle que $1 \leq \text{rg}(B) \leq r$.
- e. Prouver la réciproque de la question **b.**
11. (IMT - MP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$[\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{rg}(AM) = \text{rg}(MA)] \iff [A = 0 \text{ ou } A \text{ est inversible}]$$

12. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M . On rappelle que $M\widetilde{M} = \widetilde{M}M = \det(M)I_n$.
- a. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- i. Montrer que $\widetilde{P}$ est inversible, et que $\det(\widetilde{P}) = \det(P)^{n-1}$.
- ii. Calculer $\widetilde{\widetilde{P}}$.
- iii. Trouver une relation entre $\widetilde{P}^{-1}$ et $\widetilde{P^{-1}}$.
- b. Soient A et B dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- i. Montrer que $\widetilde{(AB)} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.
- ii. On suppose trouvée $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $\widetilde{B} = P^{-1}\widetilde{A}P$.
- c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- i. Montrer que, si A est diagonalisable, alors $\widetilde{A}$ l'est aussi.
- ii. La réciproque est-elle vraie?

Réduction des endomorphismes

13. On pose $E = \mathbb{R}_4[X]$. Soit $\Phi : E \rightarrow E$ telle que $\forall P \in E \quad \Phi(P)(X) = P(X) + 2X^4P(1/X)$.
- a. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
- b. Déterminer les éléments propres (vecteurs propres, valeurs propres) de Φ .
14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.
- a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que A soit diagonalisable.
- b. La diagonaliser dans ce cas.
15. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- a. Déterminer les vecteurs propres de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ avec $\forall i \in \{2; 3; 4\} \quad |\varepsilon_i| = 1$ et $\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1$.
- b. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A .
- c. Déterminer le polynôme minimal π_A de A dans chacun des cas $a = 1, b = 2, c = 3$ et $a = b = c = 1$.
- d. Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\deg(\pi_A) = 4$.
- e. Donner une condition pour avoir $\deg(\pi_A) = 3$.

16. (CC-INP PSI) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient a un vecteur non nul de E , et φ une forme linéaire non nulle sur E . Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = \varphi(a)x - \varphi(x)a$.
- Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f .
 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\varphi(a)$ pour que f soit diagonalisable.
 - Pour $x \in E$, calculer $f^2(x)$; en déduire un polynôme de degré 2, annulateur de f . Retrouver alors le résultat du b.
17. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on pose $F(P) = P + \frac{1-X}{n} \cdot P'$.
- On admet que F est linéaire. Montrer que F réalise un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; on note toujours F cet endomorphisme.
 - Donner la matrice de F dans la base canonique. Est-elle diagonalisable?
 - Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1.
 - Supposons λ une valeur propre de F différente de 1, et P un vecteur propre associé. Montrer que 1 est racine de P , puis déterminer le sous-espace propre associé à λ .

18. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$.

- Calculer P_1 et P_2 . Montrer que, pour tout n , $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.
 - Soit $x \in]-2, 2[$; on pose $x = 2 \cos a$, avec $a \in]0, \pi[$. Montrer que, pour tout n , $P_n(x) = \frac{\sin(n+1)a}{\sin a}$.
 - Pour tout n , déterminer les valeurs propres de A_n , et les dimensions des sous-espaces propres associés.
19. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent tous b , les autres valant 1; soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.
- Les matrices A et J sont-elles diagonalisables?
 - Déterminer les éléments propres de la matrice J .
 - Calculer le déterminant de A .

Variante : après avoir exprimé A comme combinaison linéaire de I_n et J , déterminer un polynôme annulateur de A ; puis calculer $\det A$.

20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n$ et $A \notin \{I_n, -I_n\}$.
- Montrer que $\text{tr } A \equiv n \pmod{2}$.
 - Montrer que $|\text{tr } A| \leq n - 2$.
21. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + {}^tA = I_n$.
- Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 4. Que peut-on en déduire sur A ?
 - Montrer que 0 et 1 ne peuvent être valeurs propres de A (on pourra étudier tXAX pour X bien choisi).
 - Montrer que A est symétrique et expliciter sa forme.
22. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E , de matrices respectives A et B dans une même base $\mathcal{B}$ de E .
- Dans cette question, on suppose f bijective.
 - Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
 - Montrer que, si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ l'est aussi.
 - On ne fait plus d'hypothèse sur f .
 - Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même spectre.
 - Donner un exemple de matrices telles que AB soit diagonalisable, mais pas BA .

- 23.** Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E de rang 1.
- Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f \iff f$ n'est pas diagonalisable.
 - Donner un exemple concret d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 qui ne soit pas diagonalisable. Justifier par une autre méthode qu'elle n'est pas diagonalisable.
- 24.** Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul, et vérifiant $f^3 + f = 0$.
- Démontrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires. On pose $K = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$.
 - Démontrer que $\dim(K) > 0$. Pour $x \in K \setminus \{0_E\}$ démontrer que $f(x) \in K$ et que $(x, f(x))$ est libre dans K .
 - Calculer $\det(-\text{Id}_E)$; en déduire que K est de dimension 2. Démontrer qu'il existe une base de E , dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 25.** (CC-INP PSI) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $u^3 = \text{Id}$ et $u \neq \text{Id}$.
- Montrer que 1 est valeur propre de u .
 - Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$.
 - Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 26.** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.
- Déterminer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de A .
 - Déterminer le polynôme minimal de f .
 - Rappeler le lemme des noyaux. En déduire deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ supplémentaires et stables par f .
On note F celui de dimension 1 et G celui de dimension 2.
 - Soit (u_1) une base de F et (u_2, u_3) une base de G . On note d l'endomorphisme tel que $d(u_1) = -u_1$, $d(u_2) = u_2$ et $d(u_3) = u_3$.
 - Montrer que f et d commutent.
 - On pose $n = f - d$. Calculer n^2 et montrer que n est nilpotent. Montrer que n et d commutent.
 - Exprimer f^k pour $k \geq 1$ en fonction de n et d .
- 27.** Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n , où $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soit u un endomorphisme de E . Montrer que u admet au moins une valeur propre.
 - Soient u et v des endomorphismes de E qui commutent; soit F un sous-espace propre de u .
 - Montrer que F est stable par v .
 - Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.
 - Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes de E , qui commutent deux à deux. Montrer qu'ils possèdent un vecteur propre en commun.
- 28.** Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
- N est nilpotente;
 - 0 est la seule valeur propre de N ;
 - N est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle;
 - $N^3 = 0$.

Espaces euclidiens

- 29.** (IMT MP) Déterminer tous les n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = n$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.
- 30.** (CC-INP PSI) Soit E un espace euclidien ; soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .
- a. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$; montrer que $\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2$.
- b. En déduire que, si $\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 < 1$, alors la famille $(e_1 + u_1, \dots, e_n + u_n)$ est libre.
- 31.** On pose $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour tout f et g dans E , $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$.
- a. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
- b. Soient $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires dans E .
- 32.** Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit p un projecteur orthogonal de E , de rang r ; soit $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sa matrice dans une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.
- a. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$; en déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
- b. Démontrer que $\text{tr}(C) = r$.
- c. Soit $x \in E$. Montrer que $(p(x)|x) = \|p(x)\|^2$.
- d. Montrer que $\sum_{i=1}^n (p(e_i)|e_i) = r$ puis que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{i,j}^2 = r$.
- 33.** (CC-INP PSI) On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au plan P défini par les équations $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$
- 34.** Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels non tous nuls. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = x_i x_j$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
- a. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- b. Déterminer ses éléments propres.
- c. Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .
- 35.** On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
- a. Déterminer le rang de M .
- b. Déterminer les espaces propres et valeurs propres de f .
- c. Déterminer la matrice dans la base canonique, de la projection orthogonale sur $\text{Im } f$.
- 36.** Soit E un espace préhilbertien réel ; on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que : $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle^2$.
- On pose $F = \text{Vect}((e_i)_{1 \leq i \leq n})$.
- a. Déterminer l'orthogonal de F . Que peut-on en déduire sur $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$? sur l'espace E ?
- b. Soit $u : x \mapsto x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.
- i. Justifier que u est un endomorphisme symétrique de E .
- ii. Montrer que $\forall x \in E \quad \langle u(x), x \rangle = 0$.
- iii. En déduire que $\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.
- c. On suppose de plus $n = \dim E$; montrer que $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E .

- 37.** Soit E un espace euclidien ; soient a et b deux vecteurs unitaires non colinéaires de E .
On considère $u : x \in E \mapsto \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$.
- Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E .
 - Donner le noyau de u .
 - Déterminer les éléments propres de u .
- 38.** **a.** Montrer que $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est orthogonale. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que A est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.
- b.** Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Montrer que 2 des 3 assertions suivantes impliquent la troisième :
- u est une isométrie ;
 - $u^2 = -\text{Id}_E$;
 - $\forall x \in E \quad \langle x | u(x) \rangle = 0$.
- 39.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note O_n l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et E_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives, c'est-à-dire des matrices A symétriques vérifiant ${}^t X A X > 0$ pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle.
Soit $A \in E_n$.
- Montrer que A est diagonalisable.
 - Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.
 - Montrer qu'il existe $B \in E_n$ telle que $B^2 = A$.
 - Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe $H \in E_n$ telle que ${}^t C C = H^2$; H est-elle inversible ?
 - Montrer qu'il existe $U \in O_n$ et $V \in E_n$ telles que $C = UV$.
- 40.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et à valeurs propres strictement positives. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, de rang p .
On pose $C = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^t B & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$.
- Montrer que, pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, ${}^t X A X > 0$.
 - Montrer que $p \leq n$.
 - Montrer que C est inversible.

Analyse élémentaire

- 41.** (IMT MP)
- Décomposer $\frac{1}{(X-1)^2(X^2-2X+5)}$ en éléments simples.
 - Calculer $\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2(t^2-2t+5)} dt$.
- 42.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Soit f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |f^{(n)}(t)| \leq |P(t)|$.
- Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(a)| = 0$.
 - Montrer que f est la fonction nulle.
 - Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse de degré impair ?
- 43.** Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$; soit $f \in E$. Soit $G_f : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \inf(x,t) f(t) dt$.
- Montrer que G_f est continue.
 - Soit $x \in [0,1]$. Représenter $t \mapsto \inf(x,t)$ sur $[0,1]$, et en déduire une nouvelle expression de $G_f(x)$.
 - Montrer que G_f est de classe $\mathcal{C}^2$, et exprimer G'_f et G''_f à l'aide de f .
 - Soit $u : E \rightarrow E, f \mapsto G_f$. Montrer que u est linéaire et injective. Est-elle surjective ?
 - Donner les vecteurs propres et valeurs propres de u .

Espaces vectoriels normés

44. Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. On dit qu'une suite (x_n) de vecteurs de E converge fortement vers un vecteur x si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. On dit que (x_n) converge faiblement vers x si $\forall y \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x, y \rangle = 0$.
- Montrer que, si (x_n) converge faiblement, alors on a unicité de la limite.
 - Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
 - Montrer que (x_n) converge fortement vers x si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$.
 - Montrer que, en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.
45. (IMT MP) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note e_λ la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{\lambda t}$; soit E l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$.
- Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}$. Montrer que N est une norme sur E .
46. (IMT MP)
- Montrer que toute application continue f définie sur le segment $[0, 1]$, et telle que $f(0) = 0$, est la limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de fonctions polynomiales (Q_n) vérifiant $Q_n(0) = 0$ pour tout n .
 - Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(x \mapsto e^{-nx}, n \in \mathbb{N}^*)$. On munit F de la norme $\| \cdot \|_\infty$.
Montrer que G est dense dans F .

Suites et séries numériques

47. (CC INP - PSI) Soit (a_n) une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)\dots(1+a_n)}$.
- Calculer $u_1 + u_2 - 1$; généraliser.
 - La série $\sum u_n$ converge-t-elle?
 - Calculer la somme de la série des u_n pour $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
48. (CC INP - PSI)
- Montrer que l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ a une unique solution dans $[0, 1]$, notée u_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Montrer que la suite $(u_n)_n$ a pour limite 0.
 - Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
 - Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?
49. La suite (u_n) est définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.
- Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
 - Énoncer et redémontrer le théorème de sommation des relations de comparaison pour les sommes partielles dans le cas divergent positif.
 - Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$; en déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
50. (CC-INP PSI)
- Pour $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$.
 - En développant $(n+1)^p$, exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, S_p en fonction de $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$.
 - Montrer que $\forall p \in \mathbb{N} \quad S_p \in \mathbb{N}$.
51. (IMT - MP) Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

Intégration

52. (IMT - MP) Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax}) dx$.
53. (IMT - PSI) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) dt$, puis la calculer.
54. (IMT - MP) On considère l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$. Justifier son existence et la calculer.
55. (ENSEA - PSI) Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
- Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner sa dérivée.
 - Montrer que, au voisinage de $+\infty$, $F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
 - Montrer que $g : t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$. En déduire un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de 0.
 - Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer $\int_0^{+\infty} F(t) dt$ en fonction de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

56. (CC-INP - PSI) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$.
- Déterminer la limite de la suite (I_n) .
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+2}$.
 - Calculer $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$.
 - Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n$ et calculer sa somme.
57. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \leq \sqrt{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
 - Montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x) dx = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n+1} dx$.
- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n+1} dx$.
- Calculer I_0 et I_1 .
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer I_n en fonction de n .
 - En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- c. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
58. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On suppose que g est positive, et qu'il existe $a > 0$ tel que g soit nulle en-dehors de $[-a, a]$; on suppose enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 1$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = ng(nt)$.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f * g_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_n(x-t) dt$. Montrer que $f * g_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $f * g_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) f(x-t) dt$.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n = f * g_n$; montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- c. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers f .
59. (IMT - MP) Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t} dt$.
60. Soit $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh} t}{t} dt$.
- a. Démontrer que g est définie sur $]1, +\infty[$.
- b. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.
- c. Calculer la limite de g en $+\infty$; puis expliciter g sur $]1, +\infty[$.
61. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe la fonction $F_f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$.
- a. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-|x|}$. Montrer que F_g est bien définie, et calculer $F_g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- b. Si f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que F_f est définie sur $\mathbb{R}$.
- c. On suppose de plus qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n f(t)| dt$ converge.
- Pour tout entier k , soit $h_k : t \mapsto (-it)^k f(t)$.
- i. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, F_{h_k} est définie sur $\mathbb{R}$.
- ii. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, F_f admet une dérivée d'ordre k et que $F_f^{(k)} = F_{h_k}$.

Suites et séries de fonctions

62. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$.
- a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
- On note f sa limite. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x) \geq f(x)$.
- b. On admet que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$. Pour tout $a > 0$, montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, a]$.
- c. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
63. (IMT - PSI) Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs. Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = a_n x^n (1-x)$.
- a. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
- b. Montrer qu'elle converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
- c. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si la suite (a_n) a pour limite 0.
64. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$.
- a. Déterminer le domaine de définition de f .
- b. Étudier le sens de variation et la continuité de f .
- c. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, et la déterminer.
- d. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
65. Soit $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$.
- a. Montrer que S est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b. Montrer que S est décroissante.

- c. Déterminer la limite de S en $+\infty$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de f en 0.
66. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + n^2}$.
- a. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On pose $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
- b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- c. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pi$; on pourra considérer $g_a : t \mapsto \frac{2a}{t^2 + a^2}$.
67. a. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$.
- b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(t) = \frac{t^n (\ln t)^n}{n!}$.
- i. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner sa somme.
- ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0, 1]$.
- iii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$.
- c. En déduire une expression de $\int_0^1 t^t dt$ comme somme de série.
68. a. Montrer que $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2}$ est intégrable sur $]0, 1]$.
- b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1]$, on pose $u_n(x) = x^{2n} (\ln x)^2$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que u_n est intégrable sur $]0, 1]$, et calculer $\int_0^1 u_n(x) dx$.
- c. Déterminer une expression de $I = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2} dx$ sous forme de somme.
- d. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une méthode de calcul de I à ε près.
69. Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$; soit $f : t \in]0, 1] \mapsto \frac{t^{a-1}}{1 + t^b}$.
- a. Pour $t \in]0, 1]$, écrire $f(t)$ comme somme d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$, où les u_n sont des fonctions puissances.
- b. Déterminer la nature de la série $\sum \int_0^1 |u_n(t)| dt$. Commenter.
- c. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1]$, on pose $S_N(t) = \sum_{n=0}^N u_n(t)$.
Démontrer que $\int_0^1 f(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt$, puis que $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + nb}$.
- d. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Séries entières

70. (CC-INP - PSI)

- a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $t \mapsto (\operatorname{cht})^{-n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- b. Déterminer la limite de $I_n = \int_0^{+\infty} (\operatorname{cht})^{-n} dt$ quand n tend vers $+\infty$.
- c. Étudier la convergence des séries $\sum (-1)^n I_n$ et $\sum I_n$; on pourra noter que $\operatorname{cht} \geq \operatorname{sht}$ pour tout t .
- d. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$.
71. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions

$$f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2) ; \quad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$

72. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$. L'objectif de l'exercice est d'exprimer f par deux méthodes différentes.

- a. Déterminer le domaine de définition D de f .
- b. Méthode 1
- Décomposer $R = \frac{1}{X(X+1)(2X+1)}$ en éléments simples.
 - En déduire une expression de f sur D .
- c. Méthode 2 : donner une expression de f'' puis de f' sur $] -1, 1[$; conclure.
73. a. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)x^n$? On note g la fonction somme.
- b. Soit $x \in] -1, 1[$. Montrer que $(x-1)g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$.
- c. En remarquant que $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \int_{n-1}^n \frac{dx}{x}$, déterminer un encadrement de $(x-1)g(x)$ pour $x \geq 0$.
- d. En déduire un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers 1.
74. Soit E un ensemble à n éléments. On note a_n le nombre de bijections sans point fixe de E dans lui-même.
- a. Démontrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k}$.
- b. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Démontrer que la série entière de définition de f admet un rayon de convergence R non nul.
- c. Pour $x \in]-R, R[$, calculer $e^x f(x)$.
- d. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_n .
- e. Un professeur distribue aléatoirement des copies à ses élèves. On note D_n l'événement "aucun des n élèves n'a sa propre copie". Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(D_n)$.

Équations différentielles

75. (IMT - MP) On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + (\text{sht})y' + y = 0$.
- Montrer que, si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $t \mapsto f(-t)$ est aussi solution.
 - Montrer que (E) admet une et une seule solution f qui soit paire et vérifie $f(0) = 1$.
76. On considère l'équation différentielle $(E) : x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0$.
- Donner l'expression de la dérivée de $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
 - Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
 - Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0; on précisera leur rayon de convergence.
 - L'équation a-t-elle des solutions sur $] -2, +\infty[$?
77. Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = -3x - 6y \\ z' = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$
78. Soit q une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$; soit f une solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $y'' + qy = 0$, autre que la fonction nulle.
- Montrer que les zéros de f sont isolés, c'est-à-dire que, si $f(x_0) = 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que f ne s'annule en aucun autre point de $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.
 - Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[a, b]$.
79. (IMT - MP)
- Montrer que les solutions de l'équation $(E) : y'' + y = e^{-\sqrt{t}}$ sur $\mathbb{R}_+$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto A \cos x + B \sin x + \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}} dt$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
 - Montrer qu'une et une seule de ces solutions a une limite finie en $+\infty$.

Fonctions de plusieurs variables

80. On travaille dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel. Soient f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres strictement positives, et $u \in \mathbb{R}^n$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $g(x) = (f(x) | x) - (u | x)$.

a. Montrer que g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$; montrer qu'elle admet des dérivées partielles en tout point, les préciser.

b. Montrer que g admet un unique point critique z , que l'on déterminera.

c. Montrer que g admet un minimum global en z .

81. (CC INP - PSI) Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

a. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

b. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

c. Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

82. (TPE - MP) Soit f définie sur $[0, 1]^2$ par $f(x, y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ si $(x, y) \neq (1, 1)$, et $f(1, 1) = 0$.

a. Montrer que f est continue sur $[0, 1]^2$.

b. En quels points passe-t-elle par un maximum?

83. (ENSEA - MP) Déterminer les fonctions f de classe C^1 de $]0, +\infty[^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2 \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Probabilités

84. (IMT - MP) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n) = 2^{-n}$.

a. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on note A_k l'ensemble des multiples de k . Calculer $P(A_k)$.

c. Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$. Les événements A_p et A_q sont-ils indépendants?

85. (IMT - MP) Soient p et q dans $]0, 1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace, indépendantes, suivant chacune une loi géométrique, de paramètres p et q respectivement. On pose $Z = \min(X, Y)$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(X > n)$.

b. Déterminer la loi de Z , et donner son espérance.

86. Soit S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, que l'on munit de la probabilité uniforme. On choisit aléatoirement une permutation σ de S_n ; pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si $\sigma(k) = k$ et 0 sinon. On note N le nombre de points fixes de σ .

a. i. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Quelle est la loi de X_k ? Déterminer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

ii. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.

b. Quel lien y a-t-il entre N et les X_k ? Déterminer $E(N)$ et $V(N)$.

87. Soient $p \in]0, 1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de

Bernoulli de paramètre p . Soient $S = \sum_{k=1}^n X_k$, $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^t U$.

a. i. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer la loi de probabilité de X_k^2 .

ii. Calculer ${}^t U U$ en fonction de S .

iii. Calculer M^2 en fonction de M et S . Donner un polynôme annulateur de M .

La matrice M est-elle diagonalisable? Que peut-on dire de son spectre?

- b. i. Déterminer les coefficients de M .
 ii. Déterminer la loi de $\text{tr}(M)$, donner son espérance et sa variance.
 iii. Donner les valeurs possibles de $\text{rg}(M)$. Donner sa loi de probabilité.
 c. Donner la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes.
88. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 a. Calculer $P(X + Y = k)$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, puis pour $k \in \llbracket n + 1, 2n \rrbracket$.
 b. Calculer $P(X + Y + Z = n)$.
 c. Déterminer $P(X + Y = Z)$.
89. On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n . On tire simultanément p jetons dans l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le plus grand numéro tiré et Y celle donnant le plus petit.
 a. Montrer que
$$\sum_{k=p}^n \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}.$$

 b. i. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 ii. En déduire que, pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \frac{(n-p)!k!p}{n!(k-p)!k}.$
 iii. Calculer l'espérance de X .
 c. i. Donner la loi de Y .
 ii. Montrer que $E(Y) = pE(X)$.
90. (TPE - MP) Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2.
 a. Déterminer la valeur de a pour laquelle $E((X - a)^2)$ est minimale.
 b. On suppose que X prend ses valeurs dans un segment $[b, c]$; montrer que $V(X) \leq \frac{(c-b)^2}{4}.$
91. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et suivant la même loi que X . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.
 a. Montrer que $E(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X \geq j).$
 b. Pour tout n , exprimer $P(M_n \leq k)$ en fonction de $P(X \leq k).$
 c. Dans cette question, on suppose que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit la loi uniforme sur $\mathbb{N}_k = \llbracket 1, k \rrbracket$, où $k > 1$. Calculer $E(M_n)$ pour tout n .
 d. Dans cette question, on suppose que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \sim \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
 i. Calculer $E(M_n)$ pour tout n .
 ii. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $m_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.
92. (IMT - MP) Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$. Montrer qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z vérifiant $X = Y + Z$.

Indications

3. **a.** Penser à Rolle.
4. **b.** Si $A \in P_n$, montrer qu'il existe q tel que $A^q = I_n$.
5. **a.** Composer la première relation obtenue par p à gauche et à droite.
6. Commencer par montrer que $E = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$; puis étudier les images des vecteurs de $\text{Im } p$ et $\text{Im } q$.
9. **a.** f est une projection. **b.** Choisir B de manière à ce que les colonnes de M soient combinaisons linéaires des deux colonnes de B . **c.** En traduisant le **b.** par $f = h \circ g$, commencer par déterminer images et noyaux de g et h .
11. Pour le sens difficile, chercher M telle qu'un seul des deux produits soit nul, en passant aux applications linéaires.
12. **a.** et **b.** Exprimer systématiquement $\widetilde{M}$ à l'aide de M^{-1} . **c.i.** Utiliser **b.ii** et un argument de densité.
14. **a.** Étudier les dimensions des sous-espaces propres, en examinant le rang de $A - \lambda I_n$.
16. **a.** Écrire l'équation $f(x) = \lambda x$, et discuter suivant que (a, x) soit libre ou non.
20. Exprimer $\text{tr } A$ en fonction de la multiplicité p de la valeur propre 1, et justifier que $1 \leq p \leq n - 1$.
21. **c.** Montrer que l'on peut éliminer les facteurs X et $X - 1$ dans le polynôme annulateur du **a.**
25. **a.** Quel est le degré de χ_u ? **c.** On veut e_1 tel que $(e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ soit libre; prendre $e_1 = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$, tous deux **non nuls**.
26. **b.** Les valeurs propres sont racines du polynôme minimal, et il divise χ_f . **d.i.** et **ii.** Deux endomorphismes égaux sur F et G , le sont sur $\mathbb{R}^3$.
27. **c.** Procéder par récurrence.
28. Démontrer les implications dans l'ordre naturel.
29. Penser à Cauchy-Schwarz.
30. **a.** Le second membre doit faire penser à Cauchy-Schwarz.
34. **b.** Quel est le rang de A ?
35. **b.** Calculer $\text{tr}(M^2)$ pour obtenir une relation entre les valeurs propres.
37. **c.** Prendre une base constituée de a , b et d'une base du noyau.
40. **c.** Chercher les éléments du noyau de C sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, et noter que l'on peut appliquer **a.** à A^{-1} .
41. **a.** Une relation de Bezout permet de séparer les deux facteurs... et cette relation n'est pas compliquée à trouver.
42. **a.** Il suffit de prouver que P a une racine réelle. **b.** Utiliser Taylor-Lagrange sur $[a, t]$.
44. **a.** Si x et x' sont limites faibles, prendre $y = x' - x$ dans les deux définitions. **c.** Pour le sens non trivial, la définition de la convergence faible, avec $y = x$, fournit la limite de $\langle x_n, x \rangle$, la deuxième hypothèse donne celle de $\|x_n\|^2$.
45. Ne pas oublier de vérifier que $N(f)$ est bien défini pour tout $f \in E$. Pour $N(f) = 0 \implies f = 0$, penser aux séries entières.
46. **a.** Partir d'une suite (P_n) convergeant uniformément vers f , et poser $Q_n = P_n - P_n(0)$.
47. **b.** Sens de variation de (S_n) ? **c.** Étudier $\ln(\prod(1 + a_k))$.
48. **b.** Montrer $u_n \leq 1/\sqrt{n}$. **c.** Montrer $u_n \sim 1/\sqrt{n}$. **d.** Montrer par exemple que $u_n - 1/\sqrt{n}$ est dominée par $1/2^n$.
49. **c.** Pour l'équivalent, appliquer **b.** à la série $\sum(1/u_{n+1} - 1/u_n)$.
50. **b.** Exprimer $\sum(n+1)^p/2^n$ d'une part en fonction des S_k pour $k \leq p$, et d'autre part uniquement en fonction de S_p .
51. Développement asymptotique.
54. Ne pas oublier que l'on peut choisir la constante dans l'intégration par parties.
55. **b.** Faire deux intégrations par parties. **c.** En écrivant que $\int_x^1 g(t) dt$ a une limite finie en 0, on obtient un équivalent de $\int_x^1 (\sin t/t^2) dt$.
56. **b.** Poser $u = \tan t$. **c.** Pour $\sum(-1)^p/p$, calculer $\sum(-1)^p/(2p)$ en procédant comme pour la somme précédente. **d.** Utiliser **b.**
60. Poser $t = xu$.
61. **c.i** Il suffit de majorer $|t^k f(t)|$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
62. **c.** Pour $\varepsilon > 0$ fixé, commencer par choisir n_0 et A tels que $|f(x)| \leq \varepsilon/2$ et $|f_n(x)| \leq \varepsilon/2$ pour $n \geq n_0$ et $x \geq A$. Penser au binôme pour majorer $|f_n|$.
63. **b.** Étudier les variations de f_n . **c.** Calculer $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)$.
64. **d.** L'équivalent est le premier terme de la somme.

- 65. c.** En $+\infty$: théorème d'interversion limite/somme. En 0 : le même, appliqué à S moins son premier terme.
- 66. c.** Encadrer $f(a)$ par comparaison de $\sum g_a(n)$ à une intégrale.
- 68. d.** Le TSSA permet d'encadrer la somme de la série par ses sommes partielles.
- 69. c.** On connaît le reste de la série.
- 70. c.** Pour $\sum I_n$, réécrire la fonction sous la forme $\text{cht}/(\text{cht})^{n+1}$ avant d'utiliser l'indication de l'énoncé.
- 75. b.** Si f est solution du problème, que vaut $f'(0)$?
- 78. a.** Si x_0 n'est pas isolé, il existe une suite de zéros qui converge vers x_0 , donc $f'(x_0) = \dots$ **b.** Toute suite d'éléments de $[a, b]$ a une valeur d'adhérence.
- 79. a.** Il suffit de vérifier que le dernier terme (sous forme intégrale) est solution. Commencer par développer le sinus pour le réécrire $\lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$. **b.** Étudier séparément existence et unicité.
- 80. a.** Utiliser la définition de la différentiabilité ; puis déterminer le gradient, en utilisant la symétrie de f .
- 81. a.** Passer en polaires pour la continuité en $(0, 0)$. **b.** Étudier $\partial f / \partial x$ le long des axes de coordonnées.
- 82. b.** Noter que le maximum ne peut être sur la frontière, donc est un point critique.
- 83.** Passer en polaires.
- 84. c.** Noter que $A_p \cap A_q = A_m$, où m est le ppcm de p et q .
- 87. a.i.** $X_k^2 = X_k$. **a.iii.** Pour calculer M^2 , sortir le facteur tUU , qui est en fait un nombre. **b.iii.** Les colonnes de M sont colinéaires à U .
- 89. c.** Montrer que Y suit la même loi que $n + 1 - X$.
- 90. a.** $E((X - a)^2)$ est un trinôme du second degré en a . **b.** Revenir à la définition initiale de la variance, et appliquer le **a.** avec $a = (b + c)/2$.
- 92.** Penser aux fonctions génératrices.