

Spéciales MP* – 21/22 – Préparation à l'oral

Sauf mention contraire, les énoncés qui suivent ont été posés à l'oral CC-INP en MP en 2021.

Algèbre générale

1. (IMT MP)
 - a. Soit p un nombre premier. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
 - b. Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

Algèbre linéaire élémentaire

2. Résolvez le système
$$\begin{cases} 2mx + y + z = 2 \\ x + 2my + z = 4m \\ x + y + 2mz = 2m^2 \end{cases}$$
 d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en en discutant si nécessaire suivant les valeurs du paramètre m .
3. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E , tels que $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$.
 - a. Montrer que $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0\}$.
 - b. Soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est la projection sur $\text{Im } p \oplus \text{Im } q$ parallèlement à $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.
4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E . Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
 - (i) $\text{rg}(f + g) = \text{rg } f + \text{rg } g$;
 - (ii) $\text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0_E\}$ et $E = \text{Ker } f + \text{Ker } g$.
5. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Montrer que $\dim \text{Ker}(u + v) \leq \dim(\text{Ker } u \cap \text{Ker } v) + \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts.
On pose
$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$
 - a. Soient $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$, $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$. Exprimer le produit $V(x_0, \dots, x_n)A$ à l'aide du polynôme P .
 - b. Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ telle que $\det(T) = 1$ et

$$V(x_0, \dots, x_n)T = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & \prod_{0 \leq k \leq n-1} (x_n - x_k) \end{pmatrix}$$

- c. En déduire par récurrence une expression de $\det V(x_0, \dots, x_n)$.
- d. Soit $(r_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(r_k) \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la question a, que $P \in \mathbb{R}[X]$.

Réduction des endomorphismes

7. Soit $M_n = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = i$ si $i = j$, $m_{i,j} = 1$ sinon. On note P_n son polynôme caractéristique.
 - a. Montrer que, pour $n \geq 2$, $P_{n+1} = (X - n)P_n - X(X - 1)\cdots(X - (n - 1))$. On pourra effectuer les opérations $L_j \leftarrow L_j - L_{j-1}$ pour $j = n + 1, n, \dots, 2$.
 - b. Par récurrence sur n , montrer que $\forall n \geq 2 \quad \forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \quad (-1)^{n-k} P_n(k) \geq 0$.

- c. Montrer que M_n admet une valeur propre dans chaque intervalle $]1, 2[,]2, 3[, \dots,]n-1, +\infty[$; M_n a-t-elle d'autres valeurs propres?
8. On définit $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \longmapsto -X + \text{tr}(X)I_n$.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable? Déterminer ses sous-espaces propres.
9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$.
a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
c. Montrer que f est diagonalisable et déterminer les valeurs propres de f .
10. Soient $n \geq 3$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M .
a. Donner le rang de M .
b. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
c. Donner la matrice du projecteur sur $\text{Im } f$ de direction $\text{Ker } f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
11. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}$.
a. Calculer $\det A$ et $\text{rg } A$ pour $(a, b) = (1, 2)$, puis dans le cas général; on discutera selon les valeurs de a et b .
b. La matrice A est-elle inversible? Si oui, déterminer A^{-1} .
c. La matrice A est-elle diagonalisable? Déterminer ses valeurs propres.
12. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 5, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.
a. On suppose, uniquement dans cette question, que $a_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$. Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de u , et son polynôme minimal π_u .
b. Pour tout $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, calculer $u^k(e_1)$.
c. i. Soit P un polynôme unitaire tel que $P(u)(e_1) = 0$. Montrer que $\deg P \geq 5$.
ii. Déterminer un polynôme P_0 tel que $\deg P_0 = 5$ et $P_0(u)(e_1) = 0$.
d. Déterminer π_u ; puis déterminer χ_u par deux méthodes différentes.
e. On prend $a_1 = a_3 = a_5 = 0$, $a_2 = -4$ et $a_4 = 4$; u est-il diagonalisable?
13. Soient $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$; soient $A = \begin{pmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & b \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Les matrices A et J sont-elles diagonalisables?
b. Déterminer les éléments propres de J .
c. Dédire de ce qui précède la valeur de $\det A$.
Variante : calculer J^2 , en déduire un polynôme annulateur de A de degré 2, puis les valeurs propres et sous-espaces propres de A , et enfin $\det A$.
14. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $n \geq 3$; soit $A = \begin{pmatrix} & & c \\ (0) & & \vdots \\ & & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.

- a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\text{rg}(f) = 2$.
On suppose dans toute la suite cette condition réalisée.
- b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff [\lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 - a\lambda - (n-1)bc = 0]$.
- c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.
16. Soit $n \geq 2$; soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- a. Calculer J^p pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- b. Écrire A comme combinaison linéaire de $(J^p)_{0 \leq p \leq n-1}$.
- c. Montrer que, si $Q \in \mathbb{C}[X]$ est non nul $\deg Q < n$, alors $Q(J) \neq 0$.
- d. Quel est le degré du polynôme minimal Π_J de J ? Calculer Π_J et χ_J .
- e. Montrer que A est diagonalisable.
17. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M + 2M^T$.
- a. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ; est-il diagonalisable?
- c. Calculer $\text{tr } f$ et $\det f$.
18. On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- a. Diagonaliser A .
- b. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M = A$.
- i. Montrer que les seules valeurs propres possibles pour M sont 1, 2, -2 et -3.
- ii. Montrer que M est diagonalisable.
- c. Donner la forme générale des matrices M vérifiant $M^2 + M = A$.
19. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.
- a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
- b. On pose $B = 2A - \text{tr}(A)I_n$. Calculer $\det B$.
- c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible. Dans ce cas, déterminer B^{-1} .
- d. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.
20. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On pose $B = V^t V$.
- a. Soient p un projecteur de E et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Exprimer $\det(\text{Id}_E + \lambda p)$ en fonction de $\text{rg } p$ et de λ .
- b. Quel est le rang de B ? Est-elle diagonalisable? Donner ses valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés.
- c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = a_i a_j$ si $i \neq j$, et $m_{i,i} = 1 + a_i^2$ sinon. Déterminer $\det M$.
21. Soient $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, et λ et μ deux complexes distincts et non nuls. On suppose trouvées deux matrices non nulles A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ vérifiant $I_p = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$ et $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.
- a. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse (on pourra utiliser $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$).

- b. i. Exprimer A en fonction de I_p et M .
 ii. Montrer que A et B sont des projecteurs.
 c. La matrice M est-elle diagonalisable? Déterminer ses valeurs propres.
22. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme minimal de f soit $\pi_f = (X^2 + 1)(X^2 + 4)$.
 a. Rappeler le lemme des noyaux dans le cas de deux polynômes.
 b. Montrer qu'il existe x et y dans E , tous deux non nuls, tels que $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.
 c. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E .
 d. Donner la matrice de f dans cette base.
23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^4 = A^2$ et $\text{tr } A = n$.
24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
 a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
 b. Soit $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $Q \wedge R = 1$. Montrer que, si $Q(A) = 0$, alors $R(A)$ est inversible.
 c. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.
25. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.
 a. On suppose que $\det(f^2) \neq 0$ et que f^2 est diagonalisable.
 Montrer que f est diagonalisable; on pourra chercher un polynôme annulateur.
 b. On suppose que $\det(f^2) = 0$, que f^2 est diagonalisable, et que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.
 Montrer que f est diagonalisable.
 c. Donner un exemple d'endomorphisme f non diagonalisable tel que f^2 soit diagonalisable.
26. a. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique; M est-elle diagonalisable?
 b. Calculer $(M - I_3)^3$; en déduire le calcul de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 c. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n^2} M^n\right)$ converge. Préciser les coefficients de sa limite, que l'on notera A .
 d. On donne une colonne non nulle $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et on définit la suite (X_n) par $X_n = M^n X_0$ pour tout n . On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.
 i. Montrer que $X_n \neq 0$ pour tout n .
 ii. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}$ converge si et seulement si $x_0 - y_0 + 3z_0 \neq 0$.

Espaces euclidiens

27. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur le plan Π d'équation $x + y + z = 0$.
28. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$. On rappelle que $A_0 = 1$.
 Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.
 a. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
 b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A_n ; on discutera suivant la parité de n .
 c. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
 d. Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

29. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.
- Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
 - Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \left| \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt}$.
30. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$. Soit $u_k \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\forall x \in E \quad u_k(x) = x + k\langle x, a \rangle a$.
- Calculer $u_k(a)$. Montrer que u_k est diagonalisable dans une base orthonormée, et préciser son spectre.
 - L'endomorphisme u_k est-il symétrique ?
 - Trouver les valeurs de k pour lesquelles u_k est un automorphisme. Dans ce cas, expliciter u_k^{-1} .
31. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien, et u un endomorphisme symétrique de E .
- Soit p un entier naturel impair.
 - Montrer l'existence d'un endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$.
 - Montrer que v possède les mêmes sous-espaces propres et le même nombre de valeurs propres distinctes que u .
 - Montrer que v est l'unique endomorphisme symétrique tel que $v^p = u$.
 - Soit p un entier naturel pair et non nul.
 - A-t-on les mêmes résultats ?
 - Que peut-on dire si u est positif, c'est à dire si $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$?
 - Que peut-on dire si u et v sont positifs ?
32. Soit E un espace euclidien et $v \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.
- On dit que v est positif lorsque $\forall x \in E \quad (x|v(x)) \geq 0$.
- On dit que v est défini positif lorsque v est positif et $\forall x \in E \quad [(x|f(x)) = 0 \implies x = 0_E]$.
- Montrer que v est positif si et seulement si $\text{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.
 - Montrer que v est défini positif si et seulement si $\text{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+^*$.
 - Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E . Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^n (x|u_i)u_i$.
 - Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, et que f est symétrique, défini positif.
 - Montrer qu'il existe un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ symétrique défini positif tel que $g^2 = f^{-1}$.
 - Démontrer que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormée de E .
33. Soit E un espace euclidien ; soit u un endomorphisme symétrique de E .
- Soient $\alpha = \min(\text{Sp}(u))$ et $\beta = \max(\text{Sp}(u))$. Montrer que $\forall x \in E \quad \alpha\|x\|^2 \leq (u(x)|x) \leq \beta\|x\|^2$.
 - Montrer que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \iff \forall x \in E \quad (u(x)|x) \geq 0$.
Montrer que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \forall x \in E \quad (u(x)|x) > 0$.
 - On suppose que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\forall x \in E \quad [u(x) = 0 \iff (u(x)|x) = 0]$.
 - Soit v un autre endomorphisme symétrique de E . On suppose $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.
 - Montrer que $\text{Sp}(u+v) \subset \mathbb{R}_+$.
 - Montrer que $\text{Ker}(u+v) = \text{Ker } u \cap \text{Ker } v$.
 - Montrer que $\text{Im}(u+v) = \text{Im } u + \text{Im } v$.
34. Soit E un espace euclidien ; soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$. On suppose que u et v commutent.
- Montrer que $\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = (x|v(y))$.
 - Montrer que $\text{Ker } u = (\text{Im } v)^\perp$.
 - Montrer que $\text{Ker } u = \text{Ker } v$ et $\text{Im } u = \text{Im } v$.
 - Montrer que u et v ont le même spectre et les mêmes sous-espaces propres.
 - Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il est symétrique.

35. Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\forall x \in E \quad (u(x) | x) = 0$.
- Montrer que la matrice M de u dans une base orthonormale de E est antisymétrique.
 - Montrer que $(\text{Ker } u)^\perp$ est stable par u .
 - Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ où N est une matrice inversible.
 - Montrer que le rang de u est pair.

Analyse élémentaire

36. (CC-INP PSI) On cherche les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$. On suppose dans un premier temps trouvée une telle fonction f .
- En appliquant la relation avec plusieurs valeurs de n et x , montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x+1) = f'(x)$.
 - En étudiant l'expression $\int_x^{x+1} f'(t) dt$, montrer que f' est constante.
 - Conclure.

Espaces vectoriels normés

37. (CC INP PSI) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$.
- Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (X/2)^n$. Pour quelles valeurs de a , la suite (P_n) converge-t-elle pour la norme N_a ?
38. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $V_n = \sum_{k=0}^n u^k$.
- Soit $a \in E$. Montrer que $\frac{1}{n+1} \|u^n(a) - a\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $V_n \circ (u - \text{Id}_E)$ en fonction de u^{n+1} .
 - Montrer que $\text{Im}(u - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \{0_E\}$.
 - Dans le cas où E est de dimension finie, montrer que $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
 - Dans le cas général, on suppose $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ supplémentaires ; soit p le projecteur sur $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$.
Pour tout $x \in E$, exprimer $p(x)$ à l'aide des vecteurs $V_n(x)$.
39. (IMT MP) On pose $E = \mathbb{C}[X]$. On munit E de la norme définie par $\|P\| = \sup\{|a_k|; k \in \mathbb{N}\}$ si $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$.
Soit $b \in \mathbb{C}$. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{C}, P \mapsto P(b)$.
- Montrer que f est linéaire.
 - Étudier la continuité de f .

Suites et séries numériques

40. (IMT MP) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$.
- Montrer que, pour n assez grand, (E_n) a deux solutions u_n et v_n , vérifiant $0 < u_n < e < v_n$.
 - Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite ℓ . Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.
 - (Rajouté par moi) Montrer que (v_n) tend vers $+\infty$. Déterminer un équivalent de (v_n) quand n tend vers $+\infty$.
41. (IMT MP) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$.
Montrer que (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$; étudier la convergence de la série $\sum (u_n - \ell)$.
42. Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{a_n}{1 + a_n}$ et $c_n = \frac{1}{1 + n^2 a_n}$.

- a. Uniquement dans cette question, on suppose que (b_n) a pour limite 0.
 Montrer que (a_n) tend vers 0, et que $a_n \leq 2b_n$ à partir d'un certain rang.
- b. Montrer que, si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
- c. Montrer que, si $\sum c_n$ diverge, alors $\sum a_n$ peut converger ou diverger.
- d. On admet que la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{1+n^2x}$ admet un minimum sur $[0, +\infty[$ en $\frac{n-1}{n^2}$.
- i. Montrer que, si $\sum a_n$ converge, alors $\sum c_n$ diverge.
- ii. Montrer que, si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum c_n$ peut converger ou diverger.
43. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.
- a. On suppose dans cette question que la suite (nu_n) a une limite λ , finie ou infinie. Montrer que $\lambda = 0$.
- b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$.
- c. Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge, et que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$.
44. (IMT MP) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1+\sin n}$ converge par les 3 méthodes suivantes :
- a. à l'aide d'un développement limité ;
- b. en étudiant $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{n+1+\sin n} - \frac{(-1)^n}{n} \right)$;
- c. en montrant que le critère spécial des séries alternées s'applique.
45. (IMT MP) Justifier l'existence et calculer la valeur de $S = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Intégration

46. (IMT PSI) Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} [1 - t \operatorname{Arctan}(1/t)] dt$, puis calculer sa valeur.
47. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0, 1]$ tel que $\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t} dt = n$. On pourra considérer la fonction $F : x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$.
- b. Étudier la monotonie de (u_n) et sa limite.
- c. On pose $v_n = n + \ln u_n$. Montrer que (v_n) converge, et exprimer sa limite sous forme d'une intégrale.
- d. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
48. (Navale MP) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose trouvé $a > 0$ tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt$ converge.
- a. On suppose $f \geq 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge pour tout $x > a$.
- b. Montrer ce résultat pour f de signe quelconque ; on pourra introduire $G : x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-at} dt$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

49. (CC-INP PSI) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n : t \in [0, 1] \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$ et $I_n : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x g_n(t) dt$.
- a. Montrer que $\forall t \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.
- b. Montrer que $\forall t \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |g_n(t) - 1| \leq \frac{te^t}{n}$.
- c. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (I_n) ; prouver la convergence uniforme sur $[0, 1]$.
50. Soient $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+t}}$ et $G : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_x^{2x} f(t) dt$.

- a. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner son tableau de variations.
- b. Déterminer les limites de G en 0^+ et $+\infty$.
- c. Déterminer un équivalent simple de $G(x)$ en 0^+ ; on pourra commencer par le changement de variable $t = xu$ dans l'intégrale.
51. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$.
- a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b. Étudier le sens de variation de f .
- c. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)}$. Montrer que $g(x) = \frac{\ln 2}{x}$ pour tout x .
En déduire la limite de f en $+\infty$.
- d. Montrer que $g(x) - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}$ pour tout $x > 0$.
En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .
52. Soit $F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$.
- a. Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b. Calculer F' ; on donne $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- c. Calculer F .
53. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- c. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- d. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, exprimer $f(x)$ en fonction de $\int_x^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Suites et séries de fonctions

54. (CC-INP PSI) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = x(1 + n^a e^{-nx})$.
- a. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, vers une fonction que l'on précisera.
- b. Pour quelles valeurs de a , a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
- c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx$.
55. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
Étudier la convergence simple, normale et uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
56. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^x}$; on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ quand cela est possible.
- a. Donner le domaine de définition de f . Pour quelles valeurs de x la série converge-t-elle absolument?
- b. Soit $a > 0$. Montrer que la série converge normalement sur $[1+a, +\infty[$. Qu'en conclut-on pour f ?
- c. Soit $b \in]0, 1[$. La série converge-t-elle uniformément sur $[b, 1+a]$? Qu'en conclut-on pour f ?
57. a. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.
- c. Étudier le sens de variations de S .
- d. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$.
En déduire un équivalent de $S(x)$ au voisinage de 0, puis au voisinage de $+\infty$.

58. (CC-INP PSI) Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$.
- Donner le domaine de définition de f .
 - Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Pour tout $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$. En déduire une expression de f sous la forme d'une somme de série de fonctions.
 - Proposer une autre méthode pour décomposer $f(x)$ en somme de série; obtient-on la même série?
59. a. Étudier la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- La série de fonctions converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? Converge-t-elle uniformément?
 - Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$; donner sa limite en $+\infty$.
 - Résoudre l'équation différentielle $y' - y = -\frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - En déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.
60. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1}$.
- Donner le domaine de convergence de $\sum f_n$; calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ pour $t \in]0, 1[$.
 - Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme, de $\sum f_n$ sur $]0, 1[$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$. Justifier la convergence de la série $\sum I_n$, et calculer sa somme.
61. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$.
- Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, prouver la convergence de $I_{p,q}$.
 - Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $I_{p,q}$.
 - Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.
62. a. Montrer que $I = \int_0^1 (\ln x) \ln(1-x) dx$ est bien définie.
- Donner la décomposition en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$, et préciser son rayon de convergence.
 - Écrire I comme somme d'une série.
 - Donner la valeur exacte de I sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Variante : Montrer que $I = \int_0^1 \frac{\ln t \cdot \ln(1-t)}{t} dt$ converge, puis que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Séries entières

63. a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum (n+1)3^n z^{2n}$.
- Même question avec $\sum n^2 2^{(-1)^n} x^n$ ($x \in \mathbb{R}$).
64. Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0, et préciser les rayons de convergence :
- $$f : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{1}{6z^2 - 5z + 1} ; \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln \frac{2+x}{1-x} ; \quad h : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \sin(t^2) dt.$$
65. a. À l'aide d'une série entière, calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
- Même question avec $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ (sans utiliser la question a).
66. a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\ln n) x^n$.

- b. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D} \quad S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^{n+1}$.
- c. Montrer que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$. Calculer la valeur de ℓ .
67. (IMT PSI) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$.
- a. Déterminer les rayons de convergence de $\sum_{n \geq 1} (\ln n) z^n$ et $\sum_{n \geq 1} H_n z^n$.
- b. Pour tout $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln n$. Montrer que la suite (γ_n) converge.
- c. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.
68. (CC-INP PSI) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.
- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$.
- b. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que f soit définie sur $] -R, R[$, et qu'elle y est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.
- c. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Équations différentielles

69. a. Soit $(E) : (t^2 - 4t)y' + (2 - t)y = 4$. Trouver une solution polynomiale de (E) .
- b. Résoudre (E) sur les intervalles $] -\infty, 0[$, $] 0, 4[$ et $] 4, +\infty[$.
- c. Trouver les solutions de (E) sur $] -\infty, 4[$, $] 0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.
70. (IMT MP) Déterminer les fonctions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle $(t^2 + 1)y'' - 2y = 0$.
71. (CC-INP PSI) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 1 - 3t & -2t \\ 4t & 1 + 3t \end{pmatrix}$; on considère le système différentiel $(\Sigma) : Y' = A(t)Y$.
- a. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer les éléments propres de $A(t)$. En déduire qu'il existe une matrice P indépendante de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale pour tout t .
- b. Résoudre (Σ) .

Fonctions de plusieurs variables

72. (CC-INP PSI) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- a. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
- b. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
- c. Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.
73. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives.
- Soit $u \in \mathbb{R}^n$; soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) | x) - (u | x)$.
- a. Montrer que $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (f(h) | h) > 0$.
- b. Montrer que g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$, et calculer son gradient.
- c. Montrer que $z_0 = f^{-1}(u)$ est l'unique point critique de g .
- d. Montrer que g admet un minimum global en z_0 .

Probabilités

- 74. (CC-INP PSI)** On lance un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10, jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6.
On note X la variable aléatoire donnant le chiffre obtenu au dernier lancer.
- Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués. Déterminer la loi de N .
 - Pour tout $(k, n) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k, N = n)$.
 - Pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, calculer $P(X = k)$. En déduire la loi de X .
 - Les variables X et N sont-elles indépendantes ?
- 75. (CC-INP PSI)** On effectue une succession de lancers d'une pièce équilibrée. Soient X la variable aléatoire donnant le rang d'obtention de la première séquence "pile-face", et Y donnant le rang d'obtention du premier "pile".
- Donner la loi conjointe de (X, Y) .
 - En déduire la loi de X .
 - Calculer $E(X)$.
- 76.** Soit $n \geq 2$. On dispose d'une urne avec n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_n la variable aléatoire égale au rang d'obtention d'une boule différente de la première tirée, pour la première fois. On note Y_n la variable aléatoire correspondant au rang où, pour la première fois, toutes les boules ont été tirées au moins une fois.
- Déterminer la loi de X_n .
 - Justifier que X_n admet une espérance finie et la calculer.
 - Calculer les lois de Y_2 et Y_3 .
- 77.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi binômiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que :
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$
 - Calculer $P(X = Y)$.
 - Montrer que $P(X < Y) = P(Y < X)$, et en déduire le calcul de $P(X \geq Y)$.
- 78.** Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Y = (-1)^X$.
- Déterminer la loi de Y .
 - Calculer $E(Y)$ et $E(XY)$.
- 79.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Z = |X - Y|$.
- Calculer $P(Z = 0)$.
 - Calculer $P(Z = n)$ pour tout entier naturel non nul n .
 - Calculer l'espérance de Z .
- 80.** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.
- Déterminer les lois de X et de Y .
 - Montrer que $X + 1$ suit une loi géométrique; déterminer l'espérance et la variance de X .
 - Déterminer l'espérance et la variance de Y .
 - Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
 - Déterminer $P(X = Y)$.

Indications

1. **a.** $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre... **b.**...mais pas $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$. Factoriser et revenir dans $\mathbb{Z}$.
3. **b.** Commencer par montrer que $x - r(x) \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ pour tout x .
4. Commencer par remarquer que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$.
5. Considérer $\varphi : x \in \text{Ker}(u + v) \mapsto (u(x), -v(x))$.
6. **b.** Pour la dernière colonne de T , utiliser le **a** avec $P = \prod_{0 \leq k \leq n-1} (X - x_k)$. **d.** Noter que $V(r_0, \dots, r_n)$ est réelle et inversible.
12. **d.** Puisque les e_i sont des $u^k(e_1)$ et que u^k commute avec $P(u)$, la condition $P(u)(e_1) = 0$ entraîne $P(u)(e_i) = 0$ pour tout i . **e.** Déterminer le rang de $A - 2I_5$.
14. **b.** Étudier directement le système $AX = \lambda X$.
15. Montrer que A est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes ; noter que l'hypothèse "famille libre" signifie que A n'a pas de polynôme annulateur de degré $\leq n - 1$.
18. **b.ii** Noter que M commute avec A ; ou utiliser un polynôme annulateur de A .
19. **b.** Commencer par ajouter toutes les autres lignes à la première. **c.** On a trouvé en **a.** que $A^2 = tA$, avec $t = \text{tr } A$. Remplacer A par son expression en fonction de B pour obtenir une équation très simple vérifiée par B ; cela sert aussi en **d.**
22. **b.** Si par exemple $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \{0_E\}$, montrer que π_f n'est pas minimal. **c.** Commencer par justifier que $f(x) \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ et $f(y) \in \text{Ker}(f^2 + 4\text{Id}_E)$.
29. **b.** Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
31. **a.ii** Montrer que chaque $E_\lambda(v)$ est inclus dans un $E_\mu(u)$, puis utiliser le fait que la somme des dimensions des sous-espaces propres est $\dim E$.
32. **b.iii** Noter que $(g(u_i) | g(u_j)) = (u_i | f^{-1}(u_j))$.
33. **d.iii** Noter que, pour un endomorphisme symétrique f , $\text{Im } f = (\text{Ker } f)^\perp$.
34. **c.** Pour les noyaux, partir de $(u(x)|u(x)) = 0$. **d.** Noter que tout ce qui précède peut s'appliquer à $u - \lambda \text{Id}_E$.
35. **d.** Noter que N est antisymétrique et que sa taille est le rang de u .
37. **b.** Si (P_n) converge, alors $(N_a(P_n))$ aussi ; attention au cas $a = 2$.
39. **b.** On veut M tel que $\forall P \in E \quad |P(b)| \leq M \|P\|$. Regarder les X^k , $k \in \mathbb{N}$.
40. On note f la fonction $x \mapsto \ln x/x$. **b.** Pour la convergence, étudier le sens de variation de (u_n) , en notant que $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$. Pour l'équivalent, $f(u_n) = f(u_n) - f(1)$. **c.** Pour l'équivalent, commencer par écrire $\ln f(v_n) = -\ln n$.
41. Montrer que $\cos$ a un unique point fixe $\ell \in [-1, 1]$; utiliser les accroissements finis. Pour la série, penser à d'Alembert.
43. **b.** Commencer par comparer nu_{2n} à $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
44. **c.** Penser aux accroissements finis pour étudier le sens de variation de $n + 1 + \sin n$.
45. La somme sur p est télescopique.
47. **b.** Utiliser $u_n = F^{-1}(n)$. **c.** Mettre $F(x) + \ln x$ sous forme d'une intégrale sur $[x, 1]$.
48. **b.** Intégrer par parties en utilisant G .
50. **a.** Avec des notations évidentes, $G(x) = F(2x) - F(x)$. **b.** Encadrer $G(x)$ en encadrant f sur l'intervalle d'intégration.
55. Pour la convergence normale, étudier les variations de f_n . Pour la convergence uniforme, noter que $R_n(1/\sqrt{n+1}) \geq f_{n+1}(1/\sqrt{n+1})$.
56. **c.** Utiliser le théorème des séries alternées pour majorer le reste.
57. **d.** Pour l'équivalent en $+\infty$, utiliser le sens de variation et la relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$ pour obtenir un encadrement simple de $S(x)$.
60. **b.** Pour la convergence uniforme, utiliser la majoration du reste pour les séries alternées.
66. **c.** Prouver la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la somme du **b** en utilisant les séries alternées. Pour calculer ℓ , exprimer les sommes partielles de rang $2n$ à l'aide de factorielles, et utiliser l'équivalent de Stirling.
67. **c.** Calculer $\sum H_n x^n$ en utilisant le produit de Cauchy. Écrire ensuite $\ln n = H_n - \gamma_n$ en notant que γ_n est bornée.
70. Chercher une solution polynomiale, puis variante de la méthode de variation des constantes.
73. **d.** Étudier le signe de $g(z_0 + h) - g(z_0)$.
76. **c.** On a $Y_2 = X_2$. Pour Y_3 , commencer par calculer $P(Y_3 = j | X_3 = k)$.
77. **a.** Développer $(X + 1)^{2n}$ de deux manières. **b.** Noter que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. **c.** Remarquer que $P(X < Y) + P(Y < X) + P(X = Y) = \dots$