Spéciales MP* – 22/23 – Préparation à l'oral

Sauf mention contraire, les énoncés qui suivent ont été posés à l'oral CC-INP en MP en 2022.

Algèbre générale

1. *(IMT MP)* On note $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité. Soit $f : \mathbb{U}_n \longrightarrow \mathbb{U}_n$, $z \longmapsto z^2$.

a. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$, f est-elle bijective ?

b. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $f \circ f = \mathrm{Id}$?

2. *(IMT MP)* Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un idéal I de A est premier si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2 \quad xy \in I \Longrightarrow \big(x \in I \text{ ou } y \in I\big)$.

a. Dans le cas $A = \mathbb{Z}$, rappeler quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$; lesquels sont premiers ?

b. Soit A un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers ; montrer que A est un anneau intègre, puis que A est un corps.

3. a. Énoncer le théorème de Rolle.

b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si a est une racine d'ordre k de P, quel est son ordre dans P' ? Justifier.

c. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est aussi.

Algèbre linéaire élémentaire

4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$.
Montrer que $\quad \mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \iff \big[\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0_E\} \text{ et } \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E\big]$.

5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

a. Soit p un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p = E$ et que p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$.

b. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'on a équivalence entre les deux énoncés :

i. $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$;

ii. il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$.

6. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$. En étudiant la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u+v)$, montrer que $\quad \dim \mathrm{Ker}(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) + \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v)$.

7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

a. Montrer que f n'admet pas de valeur propre réelle, et qu'il est bijectif.

b. Montrer que n est pair.

c. Soit u un vecteur non nul. Montrer que $\mathrm{Vect}\big(u, f(u)\big)$ est stable par f.

d. On prend ici $n = 4$. Montrer l'existence de deux vecteurs u et v tels que $\big(u, f(u), v, f(v)\big)$ soit une base de E.

e. Généraliser ce dernier résultat.

8. *(IMT PSI)* Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; on pose $A^{-1} = (b_{ij})$. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

a. Donner les coefficients de $M = JA^{-1}$; déterminer son rang.

b. Montrer que $\quad \det(A - J) = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\right) \det A$.

Réduction des endomorphismes

9. Soit $n \geqslant 2$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Dans le cas $n = 2$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

c. On suppose désormais $n \geqslant 3$. Montrer que 1 est valeur propre de A, et donner une base du sous-espace propre associé.

d. Montrer que, si $\lambda \neq 1$ est valeur propre de A, alors $(\lambda - 1)^2 = n - 1$.

e. Calculer $\det A$.

10. *(CC-INP PSI)* Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$; soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = \varphi(x)a - \varphi(a)x$.

a. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$. Que vaut $f(a)$?

b. Trouver les éléments propres de f ; à quelle condition f est-elle diagonalisable ?

11. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$; soit u l'endomorphisme de E qui, à un polynôme P, associe le polynôme $P(1 - X)$.

a. Calculer $u \circ u$. En déduire les valeurs propres de u. Que peut-on dire de u ?

b. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $f(1 - x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du graphe de f ?

c. En déduire les sous-espaces propres de u. Est-ce que u est diagonalisable ?

12. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient F et G deux polynômes de degré $n + 1$. On note f l'application qui, à un polynôme $P \in E$, associe le reste de la division euclidienne de FP par G.

a. Montrer que f est un endomorphisme de E.

b. Dans quels cas f est-il un automorphisme de E ? On pourra commencer par étudier cas où F et G sont premiers entre eux.

c. On suppose que F et G sont premiers entre eux, et que G est scindé à racines simples.
Trouver les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

13. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

a. Calculer MM^T. En déduire $\det(M)$.

b. Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, montrer que $\mathrm{rg}(M) = 4$. Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, montrer que $\mathrm{rg}(M) = 2$.

c. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Quelles sont les valeurs propres de M ?

d. Montrer que M est diagonalisable.

14. **a.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $[ab > 0 \text{ ou } a = b = 0]$.

b. On suppose n pair. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer un plan stable par A. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

15. On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f : M \longmapsto aM + bM^T$ où a et b sont des réels fixés.

a. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de l'espace $\mathcal{S}$ des matrices symétriques et de l'espace $\mathcal{A}$ des matrices antisymétriques.

b. Exprimer f en fonction de p et q, où p est la projection sur $\mathcal{S}$ parallèlement à $\mathcal{A}$ et q la projection sur $\mathcal{A}$ parallèlement à $\mathcal{S}$.

c. Exprimer f^2 en fonction de f et Id.

d. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit un automorphisme ; exprimer dans ce cas f^{-1} en fonction de f et Id.

16. Soit $A \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 8$.

a. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?

b. La matrice A est-elle diagonalisable ?

c. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

17. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes.

a. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \circ u = u \circ v$ si et seulement si u et v admettent une base commune de vecteurs propres.

b. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Discuter le nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que f^2 est diagonalisable et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

b. On suppose que f^2 est diagonalisable et que f est inversible.

i. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f^2. Montrer que le polynôme $\prod_{i=1}^{p}(X^2 - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f.

ii. En déduire que f est diagonalisable.

c. On suppose que f^2 est diagonalisable et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrer que f est diagonalisable.

d. Montrer que, si f^2 est diagonalisable, f ne l'est pas forcément.

19. *(IMT MP)*

a. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles X est un vecteur propre. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donner sa dimension.

b. Même question avec X colonne non nulle quelconque.

Espaces euclidiens

20. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P = \sum_{i=0}^{2} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{2} b_i X^i$, on pose $(P|Q) = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i$. On admet que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur E.
Soit $F = \{P \in E \,|\, P(1) = 0\}$.

a. F est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, donner une base de F.

b. Soit $P = X$. Déterminer $d(P, F)$ (on pourra chercher une base orthonormée de F).

21. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On note $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$.

a. On note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
Prouver que $\det \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \prod_{i=1}^{n}(e_i \mid u_i)$.

b. Montrer que, pour toute base $\mathcal{C}$ orthonormale de E, on a $|\det \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|e_i\|$.

c. Prouver que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est orthogonale.

22. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit p un projecteur orthogonal de E.

a. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

b. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\langle x, p(x)\rangle = \langle p(x), p(x)\rangle$.

c. Montrer que $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

d. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E ; soit $A = (a_{ij})$ la matrice de p dans $\mathcal{B}$.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \operatorname{rg} p$.

23. Soit E un espace euclidien. Pour tout sous-espace F de E, on note p_F la projection orthogonale sur F.

a. Soit F un sous-espace de E. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$, et qu'on a égalité si et seulement si $x \in F$.

b. Soit F un sous-espace de E. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \big(x \,|\, p(y)\big) = \big(p(x) \,|\, y\big)$. Qu'en conclut-on ?

c. On suppose trouvés 3 sous-espaces F, G et H tels que $p_F \circ p_G = p_H$. Montrer que $H = F \cap G$, puis que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.

d. Réciproquement, on suppose trouvés F et G tels que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$. Montrer qu'il existe un sous-espace H tel que $p_F \circ p_G = p_H$.

24. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E.

a. Montrer que tout projecteur orthogonal est un endomorphisme autoadjoint.

b. Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme autoadjoint.

c. Montrer que $(\operatorname{Ker} q + \operatorname{Im} p)^\perp = \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$.

d. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

25. On note E l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. Pour tout $(f,g) \in E^2$, on pose $\varphi(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$.
On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel constitué des fonctions paires, et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

a. Montrer $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.

b. Montrer que φ est un produit scalaire sur E ; on suppose dans la suite E muni de ce produits scalaire.

c. Montrer que $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{I}$.

d. Pour $f \in E$, exprimez l'image de f par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad (A|B) = \operatorname{tr}(A^T B)$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

a. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.

c. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

d. Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer sa dimension.

e. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer la distance de J à H.

27. Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E, c'est-à-dire des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^* = -u$.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \in \mathcal{A}(E) \iff \forall x \in E,\ \langle u(x)|x\rangle = 0$.
Quelles sont les valeurs propres possibles pour un endomorphisme antisymétrique ?

b. Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{A}(E)$ à l'aide de leur matrice dans une base orthonormée.
Dans toute la suite de l'exercice, u est un endomorphisme antisymétrique fixé.

c. Soit F un sous-espace stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.

d. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique.

e. Soit x un vecteur propre de u^2. Montrer que $\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un sous-espace stable par u.

f. On suppose maintenant que $\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & (0) & & \\ & & 0 & -\lambda_2 & & & \\ & & \lambda_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & (0) & & & & 0 & -\lambda_p \\ & & & & & \lambda_p & 0 \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des réels non nuls.

28. Soient E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. On suppose que u possède deux valeurs propres de signes opposés. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\big(x|u(x)\big) = 0$.

b. On suppose que u est autoadjoint et de trace nulle. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\big(x|u(x)\big) = 0$.

c. On suppose seulement $\operatorname{tr} u = 0$. En étudiant $u + u^*$, obtenir la même conclusion.

29. Soient E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$.
Montrer que $\operatorname{Ker}(u + u^*) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker}(u^*)$.

Espaces vectoriels normés

30. *(IMT MP)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\theta_n(P) = \int_0^1 t^n P(t)\, dt$.

a. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $N(P) = \sup\{|\theta_n(P)|; n \in \mathbb{N}\}$ est bien défini.

b. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

31. Soit E un espace vectoriel normé ; soit A une partie de E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) = 1$ si $x \in A$, et $f(x) = 0$ sinon (fonction indicatrice de A).

a. Montrer que E est connexe par arcs.

b. Montrer que f est continue sur E si et seulement si A est à la fois ouverte et fermée.

c. Quelles sont les parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées ?

32. **a.** Soit $(E, ||\ ||)$ un espace vectoriel normé, et K un compact de E. Montrer que K est fermé et borné.

On étudie l'espace $E = C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, muni de la norme $||\ ||_2$, définie par $||f||_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}$.

b. On admet dans un premier temps que $||.||_2$ est une norme sur E. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 2\pi]$, on pose $f_n(x) = e^{inx}$.

i. Montrer que pour tous entiers n et p distincts, $||f_n - f_p||_2 = 2\sqrt{\pi}$.

ii. En déduire que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.

c. **i.** Démontrer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, l'inégalité $|uv| \leqslant \dfrac{|u|^2}{2} + \dfrac{|v|^2}{2}$.

En déduire que, pour tout $(f, g) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f|^2 + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g|^2$.

ii. Soit $(f, g) \in E^2$. En étudiant la fonction $h : \lambda \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \displaystyle\frac{\lambda^2}{2} \int_0^{2\pi} |f|^2 + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^{2\pi} |g|^2$, démontrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |fg| \leqslant ||f||_2 ||g||_2$.

iii. En déduire que $||\ ||_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis que c'est une norme.

Suites et séries numériques

33. *(CC-INP PSI)* On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, qu'elle converge, et déterminer sa limite.

b. Définir par récurrence deux suites d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

c. Trouver une expression de u_n en fonction de n.

34. *(ENSEA MP)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que (E_n) admet une et une seule solution x_n dans $\mathbb{R}_+$, et que $x_n \in [1/2, 1]$.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

c. Déterminer sa limite.

35. *(IMT MP)*

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos x = nx$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$; on note x_n cette solution.

b. Étudier le sens de variation et la convergence de la suite (x_n).

c. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n.

36. *(CC-INP PSI)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle converge, et déterminer sa limite.

b. Montrer que la série $\sum u_n^3$ converge ; on pourra étudier $u_{n+1} - u_n$.

c. Étudier la convergence de la série $\sum u_n^2$; on pourra étudier $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

37. *(IMT MP)* Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin n}$?

38. Soit $\alpha > 0$. On définit la suite (u_n) par la donnée de $u_1 > 0$ et $\forall n \geqslant 1 \quad u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a. Montrer que $\ln(S_n)$ est bien défini pour tout n. Exprimer $\ln(S_{n+1})$ en fonction de $\ln(S_n)$.

b. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

c. Montrer que, si $\alpha > 1/2$, alors la série $\sum u_n$ converge. Et si $\alpha \leqslant 1/2$?

Intégration

39. On note E l'ensemble $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit l'application $u(f)$ par $u(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ si $x > 0$, et $u(f)(0) = f(0)$.

a. Soit $f \in E$. Montrer que $u(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$; déterminer $u(f)'$.

b. Montrer que u est un endomorphisme injectif de E. Est-il surjectif ?

c. Déterminer les éléments propres de u.

40. *(IMT MP)* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_n^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

a. Pour quels $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est-elle convergente ?

b. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

41. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(t) = \dfrac{e^{-t}}{(t+1)^n}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de J_n. Déterminer la limite de la suite (J_n).

b. Calculer f_n' pour tout n. En déduire une relation entre J_n et J_{n+1}, puis un équivalent de J_n quand n tend vers $+\infty$.

42. Pour tout $t > 0$, on pose $f(t) = \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$.

a. Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

43. **a.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt$ converge.

b. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$.

c. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin t}{t + \cos t}\,dt$ converge.

44. **a.** Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2+1}\,dt$ est convergente.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t|\sin t|}{t^2+1}\,dt$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (u + k\pi)\frac{\sin u}{(u+k\pi)^2+1}\,du$.

c. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

45. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt$.

a. Justifiez l'existence de ces intégrales.

b. Montrer que la suite (I_n) est constante ; on pourra considérer $I_n - I_{n-1}$.

c. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin\big((2n+1)t\big)\,dt = 0$.

d. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

46. *(CC-INP PSI)*

Soit $a \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{x^a(1+x^n)}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$, et déterminer sa limite. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles la suite converge uniformément sur $[0,1]$?

b. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Si $a \in [0,1[$, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

d. Ce résultat reste-t-il vrai pour $a = 1$?

47. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

a. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que la suite (I_n) converge, et déterminer sa limite.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

d. En déduire une autre méthode pour déterminer $\lim I_n$.

48. Soit $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$.

a. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan u| \leqslant |u|$.

b. Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de F.

c. Donner une expression simple de F', puis de F.

49. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}}$.

a. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2$. Calculer $f(0)$, après avoir justifié son existence.

b. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2(x+i)f'(x) = -f(x)$, puis donner l'expression de f.

Suites et séries de fonctions

50. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour tout $x > 0$.

a. Montrer que S est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Étudier le sens de variation de S.

c. Montrer que $\forall x > 0 \quad S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{x}$: en déduire un équivalent simple de S en 0^+.

d. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

51. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$. On pose $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$; en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

c. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner, pour $x > 0$, une expression explicite de $f'(x)$.

d. Déterminer f ; en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

52. Soit $S : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2n^2}$.

a. Quel est l'ensemble de définition D de S ?

b. Montrer la continuité de S sur D (on pourra travailler sur un segment).

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

d. **i.** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

ii. Donner un équivalent de $S(x)$ en 0.

53. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $\displaystyle I_{p,q} = \int_0^1 x^p(\ln x)^q\,dx$.

a. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, étudier la convergence de $I_{p,q}$.

b. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $I_{p,q}$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \exp(x\ln x)\,dx$.

54. *(CC-INP PSI)* Pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n}$.

a. Déterminer le domaine D de convergence simple de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

b. La convergence est-elle normale sur D ?

c. Montrer que $\forall n \geqslant 2 \quad \forall x \in D \quad \displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.

La somme S de la série est-elle continue sur D ?

d. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

55. Soit $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

a. Montrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

b. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et Γ' sous forme intégrale.

c. Montrer que $\forall x > 1 \quad \forall \lambda \in]-1,1[\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-\lambda e^{-t}}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n\Gamma(x)}{(n+1)^x}$.

Séries entières

56. **a.** Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n$.

Déterminer le domaine de définition I de f.

b. Soit $g : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_1 = -1$ et $\forall n \geqslant 2 \quad a_n = -\ln(1-\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$.

Déterminer le domaine de définition J de g.

c. Montrer que $\forall x \in I \quad g(x) = (1-x)f(x) + \ln(1-x)$.

d. Montrer que $f(x) \sim -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand x tend vers 1^-.

e. Déterminer un équivalent de f en $(-1)^+$.

57. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}$. On étudie la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

a. Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière vérifie $R \geqslant 2$.

b. Calculer la somme de la série pour $x \in]-2,2[$; puis montrer que $R = 2$.

58. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \longmapsto \dfrac{e^{i2^n x}}{n^n}$. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

a. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{2^{k^2}}{k!k^k} x^k$?

c. Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de S en 0 ?

59. a. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(x)\ dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $\forall u \in]-1,1[\quad \dfrac{1}{\sqrt{1-u}} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} u^n$.

c. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}\ dt$.

Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et exprimer ce développement.

Équations différentielles

60. *(CC-INP PSI)* On considère l'équation différentielle (E) : $4xy''+2y'-y=0$. Trouver l'unique solution développable en série entière à l'origine respectant la condition $y(0)=1$.

61. Soit (E) : $(x^2-1)y''+2xy'-2y=0$.

a. Déterminer ses solutions polynômiales.

b. En déduire l'ensemble des solutions sur $]-1,1[$.

62. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & z + \cos t \\ y' & = & y + e^{3t} \\ z' & = & x + \sin t \end{array}\right.$

Y a-t-il des solutions telles que x et z soient bornées sur $\mathbb{R}_+$ et que $x(0)=z(0)$?

Fonctions de plusieurs variables

63. *(IMT PSI)* Étudier la continuité en $(0,0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0,0)$, et définies respectivement, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, par :

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2} \quad ; \quad g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad ; \quad h(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2+xy}$$

64. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0)=0$.

a. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Pour $\theta \in]-\pi,\pi]$, on pose $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. Trouver les θ pour lesquels f admet une dérivée suivant le vecteur u_θ en $(0,0)$.

c. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

d. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

e. La fonction f admet-elle des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$?

65. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0 \text{ et } y>0\}$. Soit $\Phi : (x,y) \longmapsto (xy, x/y)$.

a. Montrer que Φ réalise une bijection de Ω dans lui-même, et déterminer sa réciproque.

b. Soit f une fonction de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$, et $F = f \circ \Phi$.

Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonction des dérivées partielles de F.

c. Résoudre sur Ω $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) + 2 = 0$.

d. Résoudre sur Ω $\quad x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$.

Probabilités

66. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner $P(X \leqslant n)$ et $P(X \geqslant n)$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner $P(U = n)$ et $P(V = n)$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on dire des événements $(X = n) \cap (Y = n)$ et $(U = n) \cap (V = n)$? Les événements U et V sont-ils indépendants ?

d. Donner l'espérance de U et de V.

67. Soient A_1, A_2 et A_3 trois personnes arrivant en même temps à la poste, dans laquelle il n'y a que deux guichets ; A_3 doit donc attendre que A_1 ou A_2 ait fini avant de passer au guichet. Pour tout i, le temps passé au guichet par A_i est donné par une variable X_i suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit Y le temps d'attente de A_3 avant d'accéder à un guichet. Soit Z le temps total passé par A_3 (temps d'attente pour accéder à un guichet attendre le guichet et temps passé au guichet).

a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y > k)$; en déduire la loi de Y.

b. Déterminer la loi de Z.

c. Déterminer le temps moyen passé par A_3 à la poste.

68. Soient $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi conjointe est donnée par $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X = n, Y = k) = \dfrac{e^{-b} b^n}{k!(n-k)!} a^k (1-a)^{n-k}$ si $n \geqslant k$, et $P(X = n, Y = k) = 0$ si $n < k$.

a. Déterminer les lois de X et de Y ; ces deux variables sont-elles indépendantes ?

b. Déterminer la loi de $X - Y$; vérifier que $X - Y$ et Y sont indépendantes.

69. *(IMT MP)* Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire k boules simultanément. Soit X la variable aléatoire donnant le plus petit des numéros tirés.

a. Donner la loi de X.

b. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1}$.

c. Calculer l'espérance de X.

70. *(CC-INP PSI)* Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_{n+1} + X_n$ et $M_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$.

a. Énoncer la loi faible des grands nombres.

b. Les variables $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles indépendantes ?

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'espérance et la variance de M_n.

d. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(|M_n - 2p| \geqslant \varepsilon\right) = 0$

Indications

1. Pour les deux questions, on se simplifie la vie en passant dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ grâce à l'isomorphisme usuel.
2. b. Pour intègre : $\{0\}$ est un idéal. Pour corps : prendre $x \neq 0$, et considérer par exemple l'idéal engendré par x^2.
3. b. On a $P = (X-a)^k Q$, avec $Q(a) \neq 0$.
4. Commencer par noter que, dans tous les cas, $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
5. b. i. $\Longrightarrow$ **ii.** : prendre pour g une projection bien choisie. **ii.** $\Longrightarrow$ **i.** : décomposer x en $[x - g(x)] + g(x)$.
7. d. Prendre $u \neq 0_E$ et montrer que $\big(u, f(u)\big)$ est libre. Prendre ensuite $v \notin \operatorname{Vect}\big(u, f(u)\big)$ et montrer que $\big(u, f(u), v, f(v)\big)$ est libre. **e.** Montrer que l'on peut répéter la construction du **d.**
9. d. Si X est vecteur propre, examiner la première coordonnée de $(A - I_n)^2 X$, après avoir montré que la première coordonnée de X n'est pas nulle. **e.** Montrer que, si $\lambda \neq 1$, alors $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant n-1$.
10. b. Les deux valeurs propres trouvées sont-elles distinctes ?
11. b. et **c.** On se ramène à un problème de parité par translation sur la variable.
12. b. Dans le cas où F et G ne sont pas premiers entre eux, les décomposer sous la forme $F = DF_1$ et $G = DG_1$, où $D = F \wedge G$. **c.** Les vecteurs propres associés à λ sont les éléments du noyau de l'endomorphisme obtenu en remplaçant F par $F - \lambda$; utiliser **b.** pour déterminer les λ pour lesquels on a bien des solutions non nulles.
21. a. Noter que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ est triangulaire. **b.** Exprimer $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ en fonction de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}')$.
22. c. Écrire la matrice de p dans une base bien choisie. **d.** Le nombre étudié est $\sum \|p(e_j)\|^2$ (avec des notations évidentes). Utiliser **b**, puis **c**.
24. d. Les vecteurs de $\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$ et de $\operatorname{Ker} q$ sont des vecteurs propres pour $p \circ q$. Montrer que $\operatorname{Im} p$ admet une base de vecteurs propres pour $p \circ q \circ p$.
26. c. Décomposer M sous la forme $S + A$. **e.** Déterminer le projeté de J sur $H^\perp$.
27. a. Pour le sens $\Longleftarrow$, penser à la démonstration des formules de polarisation. **f.** Récurrence sur $\dim E$, en utilisant **e.** et **c.**
29. Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} u^*$ sont orthogonaux.
31. b. Pour le sens direct, utiliser l'image réciproque par une fonction continue ; pour la réciproque, montrer que, pour tout $x \in E$, f est constante sur une boule de centre x. **c.** Image continue d'un connexe par arcs.
34. b. Étudier le sens de variation de la suite. **c.** Utiliser $x_n \geqslant \ell$.
42. b. Choisir la bonne primitive dans l'intégration par parties.
44. c. Dans la somme précédente, minorer chaque terme en minorant simplement l'intégrale sur $[\pi/4, 3\pi/4]$ par exemple.
46. c. Convergence dominée. **d.** Minorer l'intégrale en majorant le terme $1 + x^n$, puis poser $u = nx$.
47. c. Intégration par parties dans I_n, en primitivant le facteur 1. **d.** Écrire I_n sous forme d'un produit et passer au logarithme.
56. d. et **e.** La fonction g a des limites finies en 1 et -1.
66. b. Commencer par calculer $P(U \geqslant n)$.
69. c. Utiliser $p\binom{q}{p} = q\binom{q-1}{p-1}$ pour faire apparaître la somme du **b**.