

Rappels sur les suites numériques

Le présent chapitre est un chapitre de révisions techniques et de compléments sur les suites numériques, c'est à dire à valeurs réelles ou complexes (on note \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Les résultats vus ici seront complétés lors du cours sur les séries et du cours sur les espaces vectoriels normés.

I Rappels sur les suites récurrentes linéaires

I.1 Suites géométriques

Définition

une suite est géométrique si elle est solution d'une récurrence

$$u_{n+1} = \lambda u_n$$

pour un certain nombre (réel ou complexe) λ . De façon équivalente une suite géométrique s'écrit sous la forme

$$u_n = C\lambda^n$$

pour une certaine constante C .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

La suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $|\lambda| < 1$.

la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée (son module tend vers l'infini) si et seulement si $|\lambda| > 1$.

La convergence des suites géométriques "l'emporte" sur celle des fonctions puissance. Pour $|\lambda| < 1$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \lambda^n = 0$$

Lorsque $|\lambda| = 1$ ($\lambda \neq 1$), la suite n'est jamais convergente tout en restant bornée. Pensez par exemple au cas de la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. La situation peut être compliquée : il existe $\theta \neq 0 [2\pi]$ tel que $\lambda = e^{i\theta}$. Il y a alors deux possibilités :

- S'il existe (p, q) tels que $\theta = \frac{p\pi}{q}$, (λ^n) est périodique.
- Si $\theta \notin \pi\mathbb{Q}$, on peut montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (λ^n) est le cercle unité tout entier. La démonstration de ce dernier point (hors programme) est difficile et reportée en fin de chapitre.

Somme géométrique : Il est essentiel de connaître la formule :

$$1 + \lambda + \dots + \lambda^n = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$$

I.2 Récurrence linéaire d'ordre 2

Soit P un polynôme unitaire de degré 2 : $P = X^2 - aX - b$ ($b \neq 0$). Une suite (u_n) vérifie la relation de récurrence d'ordre 2 si on a pour tout n :

$$u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0 \quad (R_P)$$

Le polynôme P s'appelle polynôme caractéristique, ou compagnon, de la récurrence (R_P) (on notera que si $b = 0$ la récurrence est en fait d'ordre 1 et on écarte ce cas, ce qui revient à supposer que 0 n'est pas racine de P).

On a le théorème suivant :

Théorème

- i. L'ensemble \mathcal{S} des solutions dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de (R_P) est un sous-espace vectoriel de dimension 2.
- ii. Au couple (α, β) donné, il existe une unique solution (u_n) vérifiant $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$.
- iii. Si P a 2 racines distinctes dans \mathbb{C} notées λ et μ , (λ^n) et (μ^n) forment une base de \mathcal{S} . Si P a une racine double λ , alors (λ^n) et $(n\lambda^n)$ forment une base de \mathcal{S} .
- iv. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que P n'a pas de racine réelle, si λ et $\bar{\lambda}$ sont les deux racines complexes avec $\lambda = re^{i\theta}$, alors $u_n = r^n \sin(n\theta)$ et $v_n = r^n \cos(n\theta)$ sont les termes généraux de suites formant une base de \mathcal{S} .

une autre façon de dire la même chose est d'écrire les solutions : elles sont de la forme

$$u_n = a\lambda^n + b\mu^n$$

ou

$$u_n = a\lambda^n + bn\lambda^n$$

Démonstration abrégée et exemples.

I.3 Récurrences linéaires d'ordre $p \geq 2$ (HP)

À un polynôme $P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0$ ($a_0 \neq 0$), on associe plus généralement (R_P) la relation de récurrence

$$u_{n+p} - a_{p-1}u_{n+p-1} - \dots - a_0u_n = 0$$

Le théorème ci-dessous généralise ce qui précède :

Théorème

L'ensemble \mathcal{S} des solutions est un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension p . L'application Φ suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathcal{S} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ \longmapsto (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{array}$$

- Si P possède p racines simples $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors $(\lambda_1^n), \dots, (\lambda_p^n)$ forment une base de \mathcal{S} .
- Si les racines de P sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités respectives m_1, \dots, m_r , alors les termes généraux des solutions sont de la forme :

$$u_n = Q_1(n)\lambda_1^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n$$

où Q_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m_i - 1$.

La démonstration de ce résultat sera donnée en annexe.

Exemple. Trouver les solutions de la récurrence $u_{n+3} = u_n$

II Récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On propose ici un plan d'étude général de ce type de suites. La fonction f est supposée continue sur une partie A de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

II.1 Plan d'étude

On considère $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I , ainsi que la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et son premier terme u_0 . Pour étudier (u_n) , on procède ainsi :

- i. Tracer le graphe de f et la droite $y = x$: *le dessin est d'une grande aide pour ces suites*
- ii. Rechercher un intervalle stable par f :
lorsque J est stable, c'est à dire tel que $f(J) \subset J$, alors si $u_0 \in J$ la suite est bien définie et est à valeurs dans J : on peut alors travailler en sécurité. Il peut arriver que cette recherche d'intervalle stable soit difficile, comme par exemple dans l'exemple $u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1}$ où l'on peut vérifier qu'il existe une infinité de valeurs de u_0 pour lesquelles la suite n'est pas définie.
- iii. On cherche les points fixes de f .
En effet, comme f est continue ce sont les seules limites possibles.

Une fois déterminé un tel intervalle, on étudie la convergence. Il n'existe pas de technique générale d'étude, on dispose cependant de deux outils importants.

- i. L'argument de monotonie.
 - Si f est croissante sur J , alors (u_n) est monotone.
 - Si f est décroissante sur J , alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

ii. L'argument de contraction : le **théorème du point fixe**

Rappelons que f est contractante lorsque il existe un K **positif strictement plus petit que 1** et tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Théorème

Si $f : I \rightarrow I$ est contractante et si l'intervalle I est fermé, alors f possède un unique point fixe dans I . De plus si $a \in I$ la suite récurrente associée à f de premier terme a converge vers ce point fixe.

Exemple. Étudier les suites (u_n) et (v_n) en fonction de leur premier terme, avec :

$$v_{n+1} = \sin v_n$$

$$u_{n+1} = \cos u_n$$

Dans le cas général, l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ est très difficile. l'exemple suivant pourtant simple est célèbre : $u_{n+1} = u_n^2 + c$ lorsque c est une constante complexe. L'ensemble des valeurs de $u_0 \in \mathbb{C}$ pour lequel la suite (u_n) est bornée peut prendre selon la valeur de la constante c des formes inattendue (Fractales de Julia, on peut montrer (voir TD) que c'est toujours une partie compacte de \mathbb{C}). A titre d'exemple (difficile)on pourra en étudiant le développement en base 2 étudier pour la suite récurrente suivante :

$$u_{n+1} = \min(2u_n, 2(1 - u_n))$$

en montrant :

- il existe une infinité de valeurs de $u_0 \in [0, 1]$ telles que la suite soit périodique.
- Il existe un choix de u_0 tel que la suite (u_n) soit dense dans $[0, 1]$

III Rappel sur le théorème de Cesàro

III.1 Lemme de Cesàro

Lemme

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels admettant comme limite $\ell \in \mathbb{R}$. On pose $v_n = \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1}$. Alors (v_n) converge également vers ℓ .

Si le lemme de Cesàro est si important c'est que l'argument de sa preuve est fondamental et reservira tout au long du cours d'analyse. A savoir refaire impérativement !!

Démonstration.

Remarque. Une version équivalente du Lemme est : Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow \ell$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \rightarrow \ell$.

III.2 Un exemples de référence

La suite $u_{n+1} = \sin u_n$

IV Suites extraites - valeurs d'adhérences

IV.1 Définitions

Extractrices

Définition

On appelle extractrice toute application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Ci-dessous une propriété immédiate, mais notable.

Proposition

Si φ est une extractrice, $\forall n, \varphi(n) \geq n$ en particulier $\varphi(n)$ tend vers l'infini.

Suite extraite

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle suite extraite toute suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où ϕ est une extractrice.

Exemples et explications

Composition d'extractrices

IV.2 Valeurs d'adhérence

On appelle valeur d'adhérence de la suite (u_n) toute limite d'une suite extraite convergente.

Exemples :

Lien avec la convergence.

Proposition

- Si (u_n) converge vers ℓ , alors toutes ses suites extraites convergent vers ℓ .
- Une suite qui a au moins deux valeurs d'adhérences diverge.
- Toute valeur d'adhérence d'une suite extraite de $(u_n)_n$ est aussi valeur d'adhérence de $(u_n)_n$.

Une caractérisation théorique

Théorème

Soit $\ell \in \mathbb{K}$. ℓ est une valeur d'adhérence si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $E_{\ell, \epsilon} = \{n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \epsilon\}$ est infini.

Suites extraites recouvrant \mathbb{N} **Proposition**

(u_n) converge si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et ont la même limite.

Ceci n'est pas réservé aux suites paires et impaires. Plus généralement, si ϕ_1, \dots, ϕ_p sont des extractrices qui recouvrent \mathbb{N} (c'est à dire telles que tout entier n est obtenu à l'aide d'une des extractrices) alors (u_n) converge si et seulement si toutes les $(u_{\phi_i(n)})$ convergent et ont la même limite.

IV.3 Exemples

Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+2}$.

Un exercice d'oral difficile

Soit (S_n) une suite réelle tendant vers $+\infty$ avec $S_{n+1} - S_n$ tendant vers 0. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérences de (e^{iS_n}) .

IV.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème majeur de ce paragraphe est le suivant.

Théorème

Toute suite bornée (réelle ou complexe) possède (au moins) une valeur d'adhérence.

Le cas réel a été vu en première année. Nous ne traitons que le cas complexe. Il est important d'avoir bien compris le principe d'extraction successive présenté ici.

Démonstration.

Corollaire

Si une suite numérique **bornée** n'a qu'une valeur d'adhérence, alors elle converge.

(c'est faux pour une suite non bornée)

V Comparaison asymptotique des suites

V.1 Comparaisons usuelles.

Il est très important de bien maîtriser le resultat suivant :

Proposition

soient $a, b \in]0, 1[$, $\alpha, \beta > 0$ on a les relations de comparaison suivantes (au voisinage de $+\infty$) :

$$-\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{(\ln n)^\beta}\right) \text{ ou encore :}$$

$$-a^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ ou encore :}$$

$$-a^n = o(b^n) \text{ si et seulement si } a < b$$

$$-\frac{1}{n!} = o(a^n)$$

En utilisant ces comparaisons, on est en général en mesure de décider si une suite tend vers 0. Voici une liste d'exemples de difficulté croissante.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^4} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^4 \frac{1}{3^n + 1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{n}} e^{-n} =$$

Trouver selon a : $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + a^n) \frac{1}{n} =$

Pour $a < 1$, $a^{2^n} = o\left(\frac{1}{n^n}\right)$

Un dernier exemple sera utile pour les séries

Proposition

On a $\frac{1}{n^a \ln^b n} = o\left(\frac{1}{n^c \ln^d n}\right)$ si et seulement si $a > b$ ou $a = b$ et $c > d$

V.2 Vitesse de convergence

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite qui tend vers l . On dit que la convergence est au moins polynômiale si $u_n - l = o(\frac{1}{n^\alpha})$ pour au moins un $\alpha > 0$.

On dit que la convergence est au moins géométrique si $u_n - l = o(a^n)$ pour au moins une valeur de $a \in]0, 1[$.

la convergence polynômiale est considérée comme lente. par exemple si $\alpha = 2$ il faudra connaître u_{1000} pour avoir une précision d'environ 6 chiffres significatifs.

La convergence géométrique est un peu meilleure. Elle est souvent assez facile à tester : en effet on a le résultat suivant (qui sera utile dans le cours sur les séries) :

si il existe un réel $a \in]0, 1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $|u_{n+1} - l| \leq a|u_n - l|$ alors la convergence est au moins géométrique.

Exemple. Reprenons les suites récurrentes vues en exemple : quelle est la vitesse de convergence ?

Dans ces deux cas, la convergence reste assez lente.

Définition

On dit que la convergence est (au moins) quadratique si il existe une constante c telle que $|u_{n+1} - l| \leq c|u_n - l|^2$

Dans ce cas, on peut montrer que $u_n - l = o(a^{2^n})$ pour un certain $a \in]0, 1[$. La convergence est infiniment plus rapide.

VI Suites de Cauchy

Ce paragraphe est hors programme

VI.1 Définition

Définition

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit (u_n) une suite à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que (u_n) est de Cauchy lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \forall p \geq N_0, |u_n - u_p| \leq \epsilon$$

Autrement dit, lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \forall p \geq 0, |u_{n+p} - u_n| \leq \epsilon$$

Remarque. L'intérêt est de montrer la convergence sans avoir recours à la limite en question.

VI.2 Propriétés

Proposition

- i. Toute suite convergente est de Cauchy.
- ii. Toute suite de Cauchy est bornée.
- iii. Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge.

Démonstration.

Théorème

Toute suite de Cauchy de réels ou de complexes converge. On dit que \mathbb{R} et \mathbb{C} sont complets.

Démonstration.

VII Annexe 1 : valeurs d'adhérence de la suite $(e^{i2\pi n\theta})_n$ lorsque θ n'est pas rationnel.

On montre que tout les nombres complexes de module 1 sont des valeur d'adhérence de cette suite. La preuve de ce résultat est difficile. Si vous souhaitez la lire, armez vous d'un stylo, faites un dessin et lisez lentement.

Posons $z_n = e^{i2\pi n\theta}$. La suite z_n est bornée donc par le théorème de Bolzano Weierstrass, elle possède une valeur d'adhérence $a \in \mathbb{C}$ qui est forcément de module 1 puisque $|z_n| = 1$ pour tout n . Soit alors φ une extractrice correspondante. La suite $\frac{z_{\varphi(n+1)}}{z_{\varphi(n)}}$ est convergente de limite 1. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n tel que $|\frac{z_{\varphi(n+1)}}{z_{\varphi(n)}} - 1| \leq \varepsilon$. Mais $\frac{z_{\varphi(n+1)}}{z_{\varphi(n)}}$ est aussi égal à z_p avec $p = \varphi(n+1) - \varphi(n)$ est un terme de la suite (z_n) (différent de 1 car θ n'est pas rationnel). Ainsi on a prouvé :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p > 0, 0 < |z_p - 1| < \varepsilon$$

Ceci prouve que 1 est une valeur d'adhérence de la suite (z_n) .

Nous montrons qu'en fait tout les points du cercle unité sont des valeur d'adhérence. Pour cela, considérons δ_p l'argument du nombre complexe z_p (il est proche de zéro). Soit z un nombre complexe de module 1. On peut écrire $z = e^{i\alpha}$ et on peut toujours choisir α de même signe que δ_p quitte à rajouter un multiple entier de 2π . Ceci fait, il existe un entier naturel n tel que $|\alpha - n\delta_p| \leq |\delta_p|$. Comme la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est 1 lipschitzienne, on a alors $|e^{i\alpha} - e^{in\delta_p}| \leq |e^{i\delta_p} - 1|$, ce qui se réécrit $|z - z_{np}| \leq |z_p - 1| < \varepsilon$.

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un élément de la suite à distance de moins de ε de z . Ceci assure que z est une valeur d'adhérence.

VIII Annexe 2 : Récurrences linéaires d'ordre p

On prouve dans cette section le théorème relatif aux suites récurrentes d'ordre p . Une autre preuve plus efficace sera vue lorsque nous disposerons des outils d'algèbre linéaire suffisants. Celle qui suit est élémentaire.

En gardant les notations du théorème, il suffit de montrer que :

i les suites du type

$$u_n = Q_1(n)\lambda_1^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n$$

où Q_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m_i - 1$ sont bien solutions de la récurrence.

ii Elles forment un espace vectoriel de dimension p .

En effet, nous savons déjà que l'ensemble des solutions est un espace de dimension p , via la bijection linéaire avec \mathbb{R}^p définie par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, \dots, u_{p-1})$.

Rappelons qu'on a supposé que le terme constant du polynôme P est non nul, car sinon la récurrence est en fait d'ordre strictement inférieur à p à partir d'un certain rang. Ceci signifie que tous les λ_i sont non nuls. Notons alors E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans \mathbb{K} , et $D : (u_n)_n \in E \mapsto (u_{n+1})_n$ l'endomorphisme de décalage d'indice. La démonstration repose sur les deux résultats suivants :

R1 Si $u_n = Q(n)\lambda^n$, avec Q polynôme de degré d alors pour tout scalaire μ la suite $(v_n)_n = (D - \mu Id)((u_n)_n)$ a un terme général de la forme $v_n = S(n)\lambda^n$ où S est un polynôme de degré d si $\lambda \neq \mu$ et de degré $d - 1$ si $\lambda = \mu$ (si $d = 0$, on a $v_n = 0$ dans ce second cas).

Ce premier résultat se prouve par un calcul direct sans difficulté.

R2 si $P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ est le polynôme caractéristique de la récurrence, alors $(u_n)_n$ vérifie R_P si et seulement si $(D - \lambda_1 Id)^{m_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_r Id)^{m_r}((u_n)_n)$ est la suite nulle.

Ce second point traduit simplement le fait que l'endomorphisme $(u_n)_n \mapsto (u_{n+p} - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k})_n$ de E est égal à $D^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k D^k = (D - \lambda_1 Id)^{m_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_r Id)^{m_r}$

On démontre alors le point [i] sans difficulté : si $u_n = Q_i(n)\lambda_i^n$ avec $\deg(Q_i) \leq m_i - 1$, alors l'application itérée du résultat R1 donne $(D - \lambda_1 Id)^{m_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_p Id)^{m_p}((u_n)_n) = (0)_n$.

Pour montrer le point [ii] il faut montrer que la famille de cardinal p des suites $n \mapsto n^k \lambda_i^n$, pour $0 \leq k \leq m_i - 1$, $1 \leq i \leq r$ est une famille libre, ce qui revient à montrer que si la suite $u_n = Q_1(n)\lambda_1^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n$ est la suite nulle, alors tous les Q_i sont nuls.

Supposons donc cette suite nulle, on évalue alors l'endomorphisme $(D - \lambda_1 Id)^{m_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_{r-1} Id)^{m_{r-1}}$ sur la suite (u_n) . Comme c'est la suite nulle on trouve d'une part 0, mais d'après R1, si Q_r est non nul, on trouve une suite v_n de la forme $S(n)\lambda_r^n$ avec S non nul, puisque la racine λ_r est distincte des précédentes. Enfin, on a supposé λ_r non nul donc pour tout n , $S(n) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi $Q_r = 0$ et symétriquement tous les autres Q_i .

IX Annexe 3 : Développement de réels à l'aide de suites d'entiers.

L'idée générale de ce paragraphe est de donner des méthode de représentations "presque bijectives" des nombres réels à l'aide de suites d'entiers. La plus utile et la mieux connue est le développement en base 10, que nous généralisons à une base b quelconque, puis nous donnons quelques autres exemples.

IX.1 Développement en base b

Dans cette partie on se donne un réel $x \in [0, 1[$ et un entier $b > 1$. Le plus souvent, on aura $b = 10$ ou $b = 2$.

Théorème

Il existe une suite (a_n) d'entiers de $\llbracket 0, b - 1 \rrbracket$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{b^k}$$

Si l'on impose que (a_n) est non constante égale à $b - 1$ à partir d'un certain rang, alors on a l'unicité de la suite (a_n) .

Cette écriture s'appelle le développement en base b de x . Les situations les plus usuelles sont les cas où $b = 10$ (développement décimal) et $b = 2$ (développement binaire)

Démonstration. Voir cours sur les séries

Le développement en base p possède la propriété suivante :

Proposition

x est rationnel si et seulement si la suite (a_n) associée est périodique à partir d'un certain rang.

Par exemple :

$\frac{1}{3} = 0.33333333333333\dots$ en base 10.

$\frac{1}{4} = 0.25 = 0.250000000\dots$ en base 10 (développement fini donc bien sur périodique à partir d'un certain rang).

$\frac{1}{4} = 0.01$ en base 2.

$\pi = 3.1415926535\dots$ a un développement qui ne devient jamais périodique (et donc en particulier, est infini).

IX.2 Autres exemples

Les exemples suivant ne sont pas détaillés. Ils sont difficiles, et si vous êtes intéressés, vous pouvez trouver des références sur internet. Le troisième est extrêmement classique et la littérature le concernant est abondante.

Développement en série factorielle

Tout réel x de $[0, 1]$ se décompose sous la forme

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$$

où a_n est un entier vérifiant $0 \leq a_n \leq n - 1$. Il y a de plus unicité, si on suppose que $a_n - (n - 1)$ n'est pas nul à partir d'un certain rang.

Développement en série de Engel

Tout réel de $]0, 1]$ se décompose de façon unique sous la forme

$$x = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0 a_1} + \frac{1}{a_0 a_1 a_2} + \dots$$

où $(a_n)_n$ est une suite croissante d'entiers avec $a_0 \geq 2$.

Développement en fractions continues

Ce développement a fait l'objet de nombreuses question d'oral à divers concours.

Si l'on note

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

pour tout réel x il existe une unique suite (a_n) d'entiers non nuls (ou bien nuls à partir d'un certain rang) telle que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, \dots, a_n]$