Suites numériques

Un peu d'histoire : Archimède ($287 - 212$ avant JC).

Archimède est l'un des plus géniaux scientifiques de tous les temps. En plus d'être mathématicien il est physicien et surtout ingénieur. Tout le monde connait la légende de la découverte du « principe d'Archimède » qui fonde l'hydraulique. Ses autres inventions, bien que moins renommées sont tout aussi importantes : il est l'inventeur des poulies et d'une première forme de calcul intégral, lui permettant de déterminer les volumes, et centres d'inerties des principaux solides. On lui doit aussi l'axiome d'archimède essentiel pour les nombres réels et des méthodes de calcul approché de π plus astucieuses les unes que les autres. Son talent s'exprime aussi dans l'art militaire et il est resté célèbre pour avoir à plusieurs reprise sauvé sa ville de Syracuse des assauts de l'armée romaine (en particulier, il incendia la flotte ennemie un jour de soleil en braquant sur elle de gigantesques miroir réfléchissants).

Recurrences linéaires à coefficients constants

1. a) Résoudre selon les valeurs de θ la récurrencce.

$$u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$$

   b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquels toutes les suite solutions sont périodiques.

2. Montrer que toutes les suites (u_n) verifiant :

$$u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$$

   sont convergentes.

3. Soient λ_1, λ_2 des nombres complexes.
   Montrer que $u_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n$ tend vers zéro si et seulement si λ_1 et λ_2 sont de module strictement inférieur à 1.

Exercices théoriques sur la convergence

4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $u_n \leq a$, $v_n \leq b$ et que $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\to} a+b$
   Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\to} b$.

5. On suppose que $(u_n)_n$ est une suite croissante telles que la suite $(u_{2n})_n$ est bornée. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente.

6. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles convergentes. Etudier la convergence de la suite de terme général $w_n = \max(u_n, v_n)$.

7. On considère une suite telle que pour tout n et pour tout$p$ entiers strictement positifs on ait :

$$0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$$

   Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

Variations autour du théorème de Cesaro

8. Soit (u_n) une suite complexe telle que $u_{n+1} - u_n \to \ell$.
   (a) En utilisant le théorème de Cesaro, donner un équivalent de u_n si $l \neq 0$.
   Quelle information obtient on dans le cas $l = 0$?
   (b) On considère la suite récurrente définie par la donnée de $u_0 \geq 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.
   Démontrer que la suite (u_n) tend vers l'infini.
   Donner un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.

9. *classique.* On considère la suite récurrente définie par la donnée de $u_0 \in [0, \pi]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
   (a) Montrer que $u_n \to 0$.
   (b) Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{1}{(\sin x)^2} - \dfrac{1}{x^2}$
   (c) En utilisant le théorème de Cesàro, en déduire la limite de $\dfrac{1}{nu_n^2}$, et donner un équivalent simple de u_n.

10. Montrer la réciproque du théorème de Cesaro dans le cas d'une suite croissante.

11. Suites barycentriques :

    On se donne une série $\sum_k \alpha_k$ à terme positifs divergente.

    Une suite (u_n) étant donnée, on définit la suite (v_n) par :

$$v_n = \frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k u_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k}$$

    En adaptant la démonstration du théorème de Césaro établir que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to}$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$

12. Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Etudier la suite

$$\frac{u_1 + 2u_2 + ... + nu_n}{n^2}$$

    (on pourra penser à utiliser l'exercice précédent)

Suites explicites

13. On considère une suite (u_n) vérifiant la récurrence $u_{n+1} = n(u_n - n)$.

    Calculer explicitement u_n (on commencera par calculer $v_n = \dfrac{u_n}{(n-1)!}$)
    (difficile)En déduire que (u_n) est bornée si et seulement si $u_1 = 2e$.

14. On considère la suite définie par la donnée de w_0 et w_1 et la récurrence

$$w_{n+2} = \frac{w_{n+1}^2}{w_n}$$

    Calculer w_n en fonction des conditions initiales.

15. On pose

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

    Trouver la limite de u_n.
    On remarquera que pour tout x positif on a l'inégalité

$$x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$$

16. Soit $a \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $u_n = \cos(a)\cos(\frac{a}{2})\dots\cos(\frac{a}{2^n})$.
    a) Justifier sans calcul que ceci définit une suite convergente.
    b) Simplifier l'expression de $\sin(\frac{a}{2^n})u_n$ et en déduire la limite de u_n.

17. *classique.* Soit (x_n) une suite positive et

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + ... + \sqrt{x_n}}}$$

    a) Etudier la suite y_n lorsque $x_n = a^{2^n}$

    b) Montrer que la suite y_n converge si et seulement si la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.

18. Etudier les suites récurrentes :
    (a) $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$
    (b) $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}$
    (c) $u_{n+1} = \dfrac{1}{a + u_n}$ pour a réel strictement positif. Dans tous les cas, le réel u_0 est positif.

19. On considère la récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $f(x) = 2x^2 - 1$ et l'on prend $u_0 \in [-1, 1]$.
    (a) Tracer le graphe de f et montrer que pour tout n, u_n est élément de l'intervalle $[-1, 1]$.
    (b) Calculer les deux points fixes de f et montrer qu'en ces points la dérivée de f a une valeur absolue strictement supéieure à 1. On peut montrer (voir exercice 22) que dans ce cas, la suite ne peut pas converger, à moins d'être constante à partir d'un certain rang.
    (c) Soit α l'unique réel de l'intervalle $[0, 1]$ tel que $u_0 = \cos(\alpha\pi)$. Montrer par récurrence que pour tout n, $u_n = \cos(2^n\alpha\pi)$.
    (d) En déduire les valeur de α pour lesquelles la suite est convergente.

20. On fixe $a > 1$. On considère la suite définie par les conditions :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a}{2u_n}, u_0 = a$$

    (a) Justifier que la suite est bien définie. Montrer sa convergence vers $l = \sqrt{a}$.
    (b) Montrer que l'on a $u_{n+1} - l < (u_n - l)^2$ pour tout n.
    (c) On prend $a = 2$. En utilisant l'inégalité précédente, determiner un entier n tel que l'on ait surement $|u_n - l| < 10^{-100}$

22. Estimation de la vitesse de convergence d'une suite récurrente.

    Soit f une fonction de classe C^2 sur un voisinage de 0 vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) = l$.
    On suppose que la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le point fixe 0.
    (a) Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers l.
    (b) Montrer que si $|l| > 1$ alors u_n est nulle à partir d'un certain rang.
    On pourrra utiliser le fait qu'une suite (v_n) non nulle positive telle que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ est croissante.
    (c) On suppose $l \neq 0, |l| < 1$ et u_n non constante à partir d'un certain rang.
    i soit a un nombre réel tel que $|l| < a < 1$ Montrer que pour n assez grand on a $|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}| < a$
    ii En déduire qu'il existe une constante c telle que $|u_n \leq ca^n|$. (la suite converge vers O a une vitesse au moins géométrique).
    iii (plus difficile) : Démontrer l'existence d'une constante C telle que $u_n \underset{\infty}{\sim} Cl^n$
    indication : en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 on montrera que la suite de terme général $w_n = \ln(\dfrac{u_n}{l^n}$ est convergente, grace à l'"tude de la série de terme général $w_{n+1} - w_n$
    (d) On suppose $l = 0$ et u_n non constante à partir d'un certain rang.
    i A l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2, montrer l'existence d'une constante C telle que $|u_{n+1}| \leq Cu_n^2$
    ii Soit m un indice fixé. Montrer par récurrencce l'inégalité, valable pour n :

$$C|u_{n+m}| \leq (Cu_m)^{2^n}$$

    iii En déduire l'existence d'une constante D et d'un réel a positif et plus petit que 1 tel que $|u_n| < Da^{2^n}$. (on rappelle que la suite u_n tend vers 0).

Valeurs d'adhérence

23. Soit (u_n) une suite telle que les 3 suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ soient convergentes. Montrer que (u_n) est convergente.

24. (difficile) Trouver une suite divergente telle que pour tout entier p la suite extraite $(u_{pn})_n$ est convergente.

25. On suppose que l'on dispose de deux suites (a_n) (b_n) telles que $a_n + b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} \underset{n\to\infty}{\to} 2$.
On rappelle qu'une suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence est convergente.
    (a) Montrer que la suite (a_n) est majorée par $\ln(3)$ pour n assez grand. En déduire que (b_n) est minorée.
    (b) Montrer de façon analogue que la suite (a_n) est minorée. En déduire qu'elle possède au moins une valeur d'adhérence.
    (c) Soit l une valeur d'adhérence de (a_n). montrer que $-l$ est valeur d'adhérence de (b_n) et que $e^l + e^{-l} = 2$
    (d) Déduire de ce qui précède que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0

26. Soit (u_n) une suite réelle positive qui tend vers 0
    (a) Est il toujours vrai que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang ?
    (b) Montrer que (u_n) possède une suite extraite décroissante.
    (c) Montrer que toute suite qui tend vers $+\infty$ possède une suite extraite croissante.
    (d) (*difficile.*) Déduire des questions précédentes, que toute suite réelle possède une suite extraite monotone.

27. On considère la suite de terme général $u_n = \sin(\sqrt{n})$
    (a) Conjecturer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n). On se propose de démontrer cette conjecture.
    (b) Montrer que toutes les valeurs d'adhérence de (u_n) sont dans l'intervalle $[-1, 1]$.
    (c) Réciproquement soit θ un élément de l'intervalle $[0, 2\pi]$. On note pour tout n, $\phi(n)$ l'unique entier tel que $\sqrt{\phi(n)} \leq \theta + 2n\pi \leq \sqrt{\phi(n)+1}$. Montrer que ϕ est bien une extractrice.
    (d) En utilisant l'inégalité $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$, montrer que $|u_{\phi(n)} - \sin\theta| \leq |\sqrt{\phi(n)+1} - \sqrt{\phi(n)}|$
    (e) Conclure que toues les élements de l'intervalle $[-1, 1]$ sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$.

Suites couplées

28. Soient a, b deux réels,0$\leq a \leq b$.
Montreer que les deux suites définies par :

$$u_0 = a; v_0 = b, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

sont adjacentes.

29. (Mines)
Soient a, b, c trois réels,$0 < c \leq a \leq b$. Etudier en généralisant l'exercice précédent, les trois suites définies par :
$u_0 = a, v_0 = b, w_0 = c$
et les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = (u_n v_n w_n)^{\frac{1}{3}}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}, \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{3}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}$$

on pourra se rappeler l'inégalité arithmético géomoétrique pour trouver une inégalité entre les trois suites

30. (Mines) On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n$$

$$v_{n+1} = u_n - v_n + w_n$$

$$w_{n+1} = u_n + v_n - w_n$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (u_0, v_0, w_0) pour que ces trois suites convergent.

31. *classique.* On considère les suites définies par les deux relations suivantes :

$u_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n!}$

$v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

(a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Leur limite est le nombre e.

(b) On souhaite en déduire que e est irrationnel. Pour cela on suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec deux entiers p et q. Montrer que les nombres u_q et e peuvent se mettre sous la forme $\frac{A}{q!}$, avec A entier. En déduire une contradiction.

Suites implicites

32. (Centrale) On pose $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$. Montrer qu'il existe un unique u_n tel que $F(u_n) - F(n) = 1$. Trouver la limite, puis un équivalent de u_n ?

33. Soient $a > 0$ et $b > 0$ des réels. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ vérifiant l'égalité :

$$x_n^n = x_n + 1$$

Etudier la suite x_n (limite l , puis équivalent de $x_n - l$)

34. On considère l'équation (E) :

$$x \tan x = 1$$

.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (E) possède une unique solution sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ que l'on note x_n.

(b) Montrer que x_n s'écrit $x_n = n\pi + y_n$ avec y_n plus petit que $\frac{\pi}{2}$. En déduire que x_n tend vers l'infini, est équivalent à $n\pi$ et que $y_n = \arctan \frac{1}{x_n}$.

(c) En déduire un développement limité à 3 termes de x_n.

35. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une solution positive et une seule que l'on notera x_n.

(b) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque n tend vers l'infini.

36. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = 1$ admet une solution et une seule que l'on notera x_n.

(b) (difficile) Déterminer la limite de (x_n) lorsque n tend vers l'infini.