Rappels sur les équivalents, les relations de comparaison, et l'étude asymptotique des suites et des fonctions

I Équivalents,o,O

I.1 Définitions

Por commencer, un rappel formel des définitions :

Définition

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage réel épointé de x_0 (donc autour de x_0 mais peut être pas en x_0).

On note $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ lorsque :

ou plus simplement :

On note $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ lorsque :

$$f(x) = g(x) + o_{x_0}(g(x))$$

ou bien :

ou encore :

Enfin on note $f(x) = 0_{x_0}(g(x))$ lorsque :

ou encore si :

Remarque.

i. Cas des suites : Dans le cas des suites, ces notions n'ont d'intérêt que lorsque la variable entière n tend vers $+\infty$.

ii. L'équivalence est une relation d'équivalence :

iii. (Très important) Un équivalent intéressant n'a <u>qu'un terme significatif</u>.

Exemple : est il vrai que

$\sin x \sim_0 x$?
$\sin x \sim_0 x - \dfrac{x^3}{6}$?
$\sin x \sim_0 x + x^2$?

Commentaires :

iv. Caractère local. Deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sont équivalentes en 0 si et seulement si leurs restrictions à $]-\varepsilon, \varepsilon[$ le sont, ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci signifie que ce qui se passe "loin" de x_0 n'a aucune importance. Il est donc essentiel de bien préciser x_0

Exemple : Donner un équivalent de $x + x^2$ au voisinage de 0,1 et $+\infty$.

I.2 Constantes, $o(1)$, $\mathcal{O}(1)$

Expression des limites avec des $o(1)$

Soit (u_n) une suite.
- (u_n) tend vers 0 si et seulement si $u_n = o(1)$
- (u_n) tend vers l si et seulement si $u_n = l + o(1)$

Soit f une fonction définie sur un voisinage épointé de x_0.
- f tend vers 0 quand x tend vers x_0 si et seulement si $f(x) = o_{x_0}(1)$
- f tend vers l quand x tend vers x_0 si et seulement si $f(x) = l + o_{x_0}(1)$.

Ainsi : trouver une limite c'est faire un développement à la précision $o(1)$

Expression des limites avec des équivalents

- Dans le cas des limites non nulles on a : $f(x) \to l$ quand $x \to x_0$ ssi $f(x) \sim_{x_0} l$
- Deux constantes équivalentes sont égales.

Trouver une limite non nulle, c'est trouver un équivalent qui est une constante.

En revanche :

Equivalent a zéro

l'écriture $f(x) \sim 0$ ou $u_n \sim 0$ est toujours incorrecte!!

Expression du caractère borné :

- La suite (u_n) est bornée si et seulement si $u_n = \mathcal{O}(1)$
- la fonction f est bornée au voisinage de x_0 si et seulement si $f(x) = \mathcal{O}_{x_0}(1)$

Exemple d'application : expression d'une asymptote

A titre d'application, écrivons la condition sur f pour que son graphe possède une asymptote quand x tend vers l'infini.

I.3 Equivalents de référence

i. Equivalent d'un polynôme en l'infini.

   Soit P un polynôme, alors $P(x)$ est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré.

   Exemple. Soit p un entier fixé : donner un équivalent, quand n tend vers l'infini du coefficient binomial $\binom{n}{2}$. Plus généralement, du coefficient binomial $\binom{n}{p}$

ii. Partie principale d'un DL

   Définition

   Supposons que $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_p(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p)$. On appelle partie principale de f en x_0 le premier terme non nul dans le développement de $f(x)$. Ici,en notant $p_0 = \min\{p,\ a_p \neq 0\}$, sa partie principale est $a_{p_0}(x - x_0)^{p_0}$.

   La partie principale de $f(x)$ est son équivalent "le plus simple" et le plus interessant.

iii. Parties principales des fonctions usuelles.
   A titre d'exemple, on a les équivalents suivants en zéro :

   $\sin x$
   $\cos x$
   $1 - \cos x$
   $\exp x - 1$

   Deux classiques à connaitre :

iv. L'équivalent de Stirling. Nous montrerons et il faut connaitre :

$$n! \sim_{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

v. L'équivalent de H_n. On note traditionnellement H_n la somme partielle de la série harmonique :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

   .
   Nous montrerons et il faut savoir que :

$$H_n \sim \ln n$$

I.4 Opérations sur les équivalents

Proposition opérations valides sur les déterminants

Les équivalents se comportent sans difficulté par :

- produits et quotients
- élévation à une puissance fixe
- Substitution : si $f(x) \sim_0 g(x)$ alors $f(u(x)) \sim_{x_0} g(u(x))$ si $u(x) \to 0$

Exemple. Soit $F(x) = \dfrac{(x^2+1)(x-3)}{x(x-2)}$. Donner un équivalent en $+\infty$, et en chacun des points 0,1,2,3. Donner enfin un équivalent de $f(x^2)$ en l'infini.

Proposition (opérations nécessitant une justification)

on ne peut procéder sans justification à :

- des sommes, des différences
- l'élévation à des puissances variables
- Le passage au logarithme et à l'exponentielle (et plus généralement, la composition)

Régle méthodologique :

Pour cette raison, les manipulation d'équivalents peuvent s'avérer délicate. En cas de doute sur une manipulation d' équivalent il faut toujours remplacer $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ par $f(x) = g(x) + o_{x_0}(g(x))$.

Exemple. (de référence)

— Passage à l'exponentielle : Il n'y a aucune implication entre les propriété $f(x) \sim g(x)$ et $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$.

En fait on a

$$e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(1)$$

Il n'est pas obligatoire de connaître ce résultat, mais il est essentiel de faire attention à chaque fois qu'une exponentielle apparaît.

Un exemple :

— Les expressions de la forme $f(x)^{g(x)}$ se traitent obligatoirement en les écrivant sous la forme $e^{g(x)\ln f(x)}$ et en développant l'exposant jusqu'à la précision $o(1)$.

Exemple de référence (à savoir refaire impérativement) : $(1 + {}^{\alpha}\!/_{n})^n \sim e^{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

— Passage au logarithme : dans la pratique, on refait les calculs à chaque fois, mais on peut connaître la règle suivante :

Proposition

Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ et si $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0 ou l'infini, alors $\ln f(x) \sim_{x_0} \ln g(x)$

Exemple : montrons que $\ln(\sin x) \sim \ln(x)$ en zéro.

Equivalent d'une somme de deux fonctions

Lorsque deux fonctions ont un développement limité au voisinage de x_0 on dispose d'une solution simple pour décider si les équivalents s'ajoutent :

Proposition

On peut ajouter des équivalents si les parties principales ne se compensent pas.

Exemple. sachant que $\sin x \sim_0 x$ et $\tan x \sim_0 x$ on déduit que :

$\sin x + \tan^2 x \sim_0 x$
$\sin x + \tan x \sim 2x$

mais que peut on dire sur $\sin x - \tan x$?

II Rappels sur développements limités

II.1 Formule tde Taylor Young

Proposition (Taylor Young)

Si f est n fois dérivable en x_0 alors :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o((x - x_0)^n)$$

Remarque. Il s'agit essentiellement d'un théorème d'existence du développement limité.

La réciproque est fausse (il existe des exemples de fonction ayant un DL à un ordre élevé, mais qui ne sont dérivables qu'une fois).

En cas d'existence, le développement limité est toujours unique.

II.2 Intégration/ dérivation des DL

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ de classe C^1 sur $]a, b]$.
On suppose $f'(x) \sim_a g'(x)$.
Alors $f(x) - f(a) \sim_a g(x) - g(a)$.

On en déduit le théorème d'intégration/dérivation des DL :

Proposition

Soit f une fonction définie et continue au voisinage du point x_0.

a) Si $f'(x)$ a un DL à l'ordre n, alors en l'intégrant terme à terme on obtient le DL à l'ordre $n+1$ de $f(x) - f(x_0)$.

b) Si on sait que f' a un DL a l'ordre n, alors celui ci s'obtient en dérivant le DL à l'odre $n+1$ de f.

<u>mais attention :</u> Il se peut que f possède un DL sans que f' n'en ait un : si l'on pet toujours intégrer un DL, il faut donc être très prudent pour le dériver.

Exemple. (très classique)
Montrons que l'on a l'équivalent suivant en 0+ ,

$$\arccos(1 - x) \sim \sqrt{2x}$$

On pourra dériver la fonction $x \mapsto \arccos(1 - x^2)$

Intégrer est donc plus facile que dériver dans les relations de comparaison. Nous verrons plus tard que l'on peut aussi intégrer les équivalents. Mais il est faux qu'on puisse sans justification dériver des équivalents. Pour s'en convaincre prendre par exemple les deux fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = x + \cos x$ au voisinage de l'infini.

II.3 Développements limités en zéro à connaitre.

Vérifiez que vous êtes capables de compléter le tableau suivant (tous les développements sont faits l'origine) :

i. Développements géométriques :

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$\frac{1}{1+x} =$$

$$\frac{1}{a-x} =$$

ii. Logarithmes et arctangentes :

$$\ln(1+x) =$$

$$-\ln(1-x) =$$

$$\arctan x =$$

iii. Exponentielles et fonctions trigonométriques :

$$e^x =$$

$$\sin x =$$

$$\cos x =$$

$$\sinh x =$$

$$\cosh x =$$

iv. Elevation à une puissance fixe :

$$(1-x)^\alpha =$$

v. Cas particulier de tangente :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Il n'est pas nécessaire d'en apprendre d'autres par coeur.

II.4 Conseils pratiques sur les calculs de DL

Dans la pratique des développements limités et des développements asymptotiques on n'a besoin que de la liste précédente et des opérations sur les DL
En effet, les fonctions qu'on est amener à développer auront toujours des expressions de la forme $e^{u(x)}$, $\ln(u(x))$ ou $\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

— Développement de $e^{u(x)}$:
  On écrit $u(x)$ sous la forme $u_0(x) + \varepsilon(x)$ et on développe sous la forme $e^{u(x)} = e^{u_0(x)+\epsilon(x)} = e^{u_0(x)}e^{\epsilon(x)} = e^{u_0(x)}(1 + \epsilon(x) + \cdots + o(\epsilon(x)^n))$. Le terme $e^{u_0(x)}$ ne peut pas être développé.

— Développement de $\ln(u(x))$
  On écrit $u(x)$ sous la forme $u_0(x)(1 + \varepsilon(x))$ (autrement dit on factorise la partie principale).
  On obtient alors $\ln(u(x)) = \ln(u_0(x)(1+\epsilon(x))) = \ln(u_0(x)) + \ln(1+\epsilon(x))$ et on utilise le développement du logarithme pour développer la seconde partie (la première ne peut pas se développer).

— Développement de $\dfrac{1}{u(x)}$
  On écrit $u(x)$ sous la forme $u_0(x)(1 + \varepsilon(x))$ (autrement dit on factorise la partie principale).
  On écrit alors $\dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{1}{u_0(x)}(1 + \varepsilon(x))^{-1}$ et on développe le second facteur (le premier ne se développe pas).

— Si l'on rencontre l'expression $u(x)^{v(x)}$ on l'écrit systématiquement $e^{v(x)\ln u(x)}$ et on est ramneé à ce qui précède.

Remarque. Pour un calcul efficace, il faut être précis dans l'ordre du développement et prévoir du mieux possible jusqu'à quel ordre il convient de mener le DL. Les deux situations les plus importantes sont les suivantes :

-pour obtenir une limite il faut un développement à la précision $o(1)$.

-pour obtenir une convergence de série il faut un développement à la précision $o(v_n)$ ou v_n est un terme de série positive convergente (souvent $v_n = \dfrac{1}{n^2}$).

II.5 Exemples divers

Une limite indeterminée

Trouver la limite en 0 de $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$

équivalent avec logarithme

Trouver un équivalent en 0 de $\ln(\tan x)$

Une recherche d'équivalent avec différence

Trouver un équivalent en 0 de :

$$f(x) = \frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x}{3-ax^2}$$

Puissance variable

Touver la limite en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Les exemples qui suivent sont moins directs : le développement limité necessite une étude plus fine.

Une équation implicite

Trouver un développement asymptotique de la suite (x_n) vérifiant la relation $x_n + e^{x_n} = n$.

Un exemple arithmétique

On admet le théorème des nombres premiers : $\pi(n) \sim \dfrac{n}{\ln n}$ et on note p_n le $n$ième nombre premier. Donner un équivalent de p_n.

Un exemple arithmetique (2)

On note a_n le nombre d'entiers inférieurs à n qui sont des puissances d'entiers (de la forme a^b avec $b > 1$). Montrer que a_n est un $O(\sqrt{n}\ln(n))$.

Un équivalent de somme(1)

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

Un équivalent de somme(2)

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$.

III Annexe : définition formelle des développements généralisés

.

Définition

soit x_0 in $[-\infty, +\infty]$ et $\mathcal{F} = (f_a)_{a\in A}$ un familles indexée de fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0 (ou un voisinage épointé à gauche ou à droite...).

On dit que $\mathcal{F}$ est une échelle de comparaison en x_0 si :
$\forall a, a' \in A, a \neq a'$ on a $f_a(x) = o_{x_0}(f_{a'}(x))$ ou $f_{a'}(x) = o_{x_0}(f_a(x))$

Des exemples importants d'échelles de comparaison sont :

- La famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en 0
- La famille $((x-x_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en x_0.
- La famille des $(x^a)_{a\in\mathbb{R}}$ en 0^+ et aussi en $+\infty$.
- La famille des $(x^a \ln^b x)_{a,b\in\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

En revanche, la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une échelle de comparaison en 1.

Définition (développement généralisé)

Soit $\mathcal{F} = (f_a)_{a\in A}$ une échelle de comparaison en x_0 et f une fonction définie au voisinage épointé de x_0. soit $a \in A$. On dit que f possède un développement généralisé dans l'échelle $\mathcal{F}$ à la précision f_a si il existe $a_1, \ldots, a_p = a \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que l'on ait en x_0,

$$f(x) = a_1 f_{a_1}(x) + \ldots + a_p f_{a_p}(x) + o(f_{a_p}(x))$$

avec $\forall i \leq p-1,\ f_{a_i}(x) = o(f_{a_{i-1}}(x))$.

Le résultat majeur est le suivant (démonstration en exercice) :

Proposition

En cas d'existence, le développement généralisé selon une échelle de comparaison est unique

Les deux premières échelles de comparaison données en exemple sont celles des développements limités usuels. A titre d'exercice de cours, vous pouvez chercher à déterminer les échelles de comparaison qui apparaissent lorsqu'on développe les exponentielles et les logarithmes par les méthodes étudiées plus haut.