Etude locale des suites et des fonctions

Un peu d'histoire : Buffon et les mathématiques. Notre lycée porte bel et bien le nom d'un mathématicien. D'aucuns pourraient s'en étonner, tant il est vrai que Georges Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788) est surtout connu pour être un grand naturaliste. Néanmoins ses travaux mathématiques s'il n'ont pas la puissance de ceux des grands mathématiciens du 18eme siècle, sont dignes d'intérêt. Sa contribution la plus célèbre est la formulation et la résolution d'une question de probabilités connue sous le nom de "problème de l'aiguille de Buffon". D'une manière générale les probabilités furent un de ses domaines de prédilection et on peut considérer qu'il fut l'un des précurseurs des statistiques notamment par l'étude scientifique des relevés de naissances de son époque qu'il mena, et dont il tira un traité sur les probabilités de durée de vie. C'était un fervent admirateur de Newton et on lui doit une traduction du traité des fluxions. Son oeuvre mathématique est empreinte de réflexions philosophiques en particulier dans son remarquable ouvrage "essai d'arithmétique morale" qui mêle probabilités et réflexions philosophiques sur la morale et l'infini.

1. Déterminer le développement limité en zéro à l'ordre 3 des expressions suivantes :
   (a) $\ln(3e^x + e^{-x})$
   (b) $\dfrac{\arctan^x\left(\cos\left(x^2\right) - 1\right)}{\ln\left(1 + x^4\right)}$
   (c) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

2. En utilisant un minimum de calcul, trouver le développement limité à l'ordre 10 en 0 de
$$g(x) = e^{\sum\limits_{k=1}^{10} \frac{x^k}{k}}$$

3. Soit $f(x) = e^{\sqrt{x+x^2}}$.
   a) Donner l'équivalent le plus simple possible de f en 0 (c'est à dire un développement ne contenant qu'un seul terme)
   b)Faire ensuite un développement à trois termes de f en 0.
   c) Est il vrai que $f(x) \sim e^x$ au voisinage de l'infini ? Sinon, trouver un équivalent simple $g(x)$.
   d) Donner un développement généralisé à 3 termes de $f(x)$ au voisingae de l'infini.

4. Soit $u_n = n^{\frac{n+1}{n}}$. Montrer que $\lim\limits_{n\infty}(u_{n+1} - u_n) = 1$. (attention il y a une petite difficulté......)

5. Déterminer selon a, b, c un équivalent quand x tend vers 0 de $a\sin x + b\sinh x + c\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$

6. Déterminer un équivalent quand x tend vers 0 de $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{3x}{3-2x^2}$.

7. Determiner les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^a}{a^x - a^a}$
   (b) $\lim\limits_{+\infty} x^2 \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x - ex^3 \ln(1 + \dfrac{1}{x})$, a étant un réel positif.

8. Equivalent d'une somme (1)
   Soit $S_n = 1 + 2! + ... + n!$. Montrer très soigneusement que S_n est équivalent à $n!$ quand $n \to \infty$

9. Equivalent d'une somme (2)
   Trouver un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n+k}$. On pourra utiliser une somme de Riemann.

10. Equivalent d'une somme (3)
    Trouver un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2+k}$. Pour cet exemple, on pourra majorer et minorer judicieusement.

11. Equivalent d'une somme (4) Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2+k})$ On utilisera l'exercice précédent et l'on trouvera une majoration de la différence $|\sin x - x|$ indépendante de x à l'aide d'une formule de Taylor.

12. Comportement asymptotique des coefficients binomiaux (1)
Lorsque k est fixé, déterminer un équivalent simple quand n tend vers l'infini de $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.
On pourra remarquer que ce coefficient est un polynôme en n.

13. Comportement asymptotique des coefficients binomiaux (2)
Comparer le comportement asymptotique de la suite $\begin{pmatrix} 2n \\ n+k_n \end{pmatrix}$ et de la suite $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ lorsque $(k_n)_n$ est une suite d'entiers telle que :

   (a) Déterminer en utilisant la formule de Stirling un équivalent du coefficient binomial "central" $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.
   Ce coefficient binomial est le plus grand de tous. On souhaite dans la suite mesurer la taille des autres coefficients binomiaux $\begin{pmatrix} 2n \\ p \end{pmatrix}$ en fonction de la distance entre p et n. Pour cela on pose $u_n = \begin{pmatrix} 2n \\ n+k_n \end{pmatrix}$, ainsi k_n mesure l'écart mentionné précédemment. On fait l'hypothése que k_n reste petit devant n c'est à dire que $\frac{k_n}{n}$ tend vers 0.

   (b) En appliquant la formule de Stirling, montrer que le quotient $\frac{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}{u-n}$ est équivalent à $v_n = (1+\frac{k_n}{n})^{n+k_n}(1-\frac{k_n}{n})^{n-k_n}$

   (c) Etablir le développement $\ln v_n \sim \frac{k_n^2}{n}$ (on rappelle que $\frac{k_n}{n}$ tend vers 0.

   (d) Dans cette question on suppose que $k_n = o(\sqrt{n})$. Montrer que $u_n \sim \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.

   (e) On suppose que $k_n \sim a\sqrt{n}$, $a \neq 0$. Que peut on dire du rapport entre u_n et $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$?

   (f) On suppose maintenant que $\sqrt{n} = o(k_n)$. Montrer que u_n est négligeable devant $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$?

   Commentaire : les résultats de cet exercices ont une interprétation très importante en théorie des probabilités.

14. DL d'une réciproque.
$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{5}}}$. Montrer que f est bijective et justifier que f^{-1} possède un DL à tout ordre en zéro. Calculer ce DL à l'ordre 5 par une méthode de substitution.

15. Equivalent d'une réciproque :
Montrer que l'application $x \mapsto x^2 \ln x$ possède une réciproque g au voisinage de $+\infty$. Déterminer un équivalent de $g(x)$.

16. (astucieux) On note r_n le nombre de couples d'entiers relatifs (x, y) tels que $x^2 + y^2 = n$.
Montrer que $\frac{r_1 + \ldots + r_n}{n}$ tend vers π

17. (difficile : cet exercice utilise la comparaison série intégrale) On pose $\varphi_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + ... + \frac{1}{x-n}$ et on note x_n la solution supérieure à n de l'équation $\varphi_n(x) = a$ $(a > 0)$. Déterminer un équivalent de x_n.