Séries et familles sommables

I Généralités

Sauf mention contraire, on se place dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I.1 Vocabulaire

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle **série** de terme général u_n la **suite** de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si la suite $(S_n)_n$ converge dans $\mathbb{K}$. En cas de convergence, on appelle somme de la série la quantité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Dans tous les autres cas (limite infinie ou absence de limite) on dit que la série diverge.

Notation. Attention à la terminologie. Il ne faut pas confondre les différents objets :

— u_n s'appelle le **terme général.**
— $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ désigne la série de terme général u_n. On emploie cette notation pour désigner l'ensemble de toutes les sommes partielles.
— $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ désigne **la somme partielle d'ordre** n**.**
— $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ désigne la **somme** de la série (qu'on pourrait aussi appeler la limite mais on préfère le terme somme)
— Enfin on parle de la **"nature"** d'une série pour désigner son caractère convergent ou divergent.

Par exemple pour la série géométrique :

I.2 Propriétés élémentaires

Les propriétés ci-après sont les traductions en termes de séries des propriétés des limites. Elles ne seront que brièvement évoquées car elles ont été vues en première année.

Condition nécessaire de convergence

Proposition

Si $\sum u_n$ converge alors (u_n) tend vers 0

Démonstration.

Attention à ne pas lire à l'envers ce résultat. **Il ne permet jamais de prouver la convergence d'une série**.

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite **grossièrement divergente.**

Caractère local de la convergence

Proposition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge.

En cas de convergence , on a la relation de Chasles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Cette proposition dit que les premiers termes de la série n'ont pas d'incidence sur sa convergence (mais ils en ont sur sa somme !).

Démonstration.

Reste d'une série convergente

Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. R_n s'appelle le reste d'ordre n de la série.

Proposition

(R_n) tend vers 0

Propriétés linéaires

Proposition

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge pour $\lambda \in \mathbb{K}$.
De plus dans ce cas :

$\sum_0^\infty (u_n + \lambda v_n) = \sum_0^\infty u_n + \lambda \sum_0^\infty v_n$

Si (u_n) est une suite conmplexe, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries des parties réelles et des parties imaginaires sont toutes les deux convergentes.
De plus :

$\mathrm{Re}(\sum_0^\infty u_n) = \sum_0^\infty \mathrm{Re}(u_n)$

$\mathrm{Im}(\sum_0^\infty u_n) = \sum_0^\infty \mathrm{Im}(u_n)$

$\overline{\sum_0^\infty u_n} = \sum_0^\infty \overline{u_n}$

La linéarité permet de manipuler des sommes de séries <u>lorsqu'on sait qu'elles sont convergentes !</u>

Exemple : Séries de Riemann alternée :
On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Nous savons que ces nombres réels existent car les deux séries sont convergentes. Admettons que $B = \dfrac{\pi^2}{6}$. Nous pouvons en déduire A :

En revanche, dans le cas où toutes les séries ne sont pas convergentes, il faut faire attention.

Proposition

Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge , alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors la nature de $\sum(u_n + v_n)$ est inconnue.

C'est bien sûr le second point qui pose problème. Dans le cas où cette situation se produit, **on doit impérativement revenir aux sommes partielles pour étudier la convergence**.

Exemple.

I.3 Séries de référence(1)

La série géométrique

Proposition

Si $z \in \mathbb{C}$, $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

.

La série géométrique est très importante car c'est l'une des seules dont on sait explicitement calculer la somme. On peut par manipulations élémentaires calculer de nombreuses autres séries si l'on remarque que ces dernières se déduisent de la série géométrique par une trasformation simple.

Exemple Calculer pour $|a| < 1$ la somme

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(n\theta)$$

La série exponentielle

Nous justifierons bientôt la convergence de la série suivante :

Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et sa somme vaut e^z.

La encore, cette série sert tout le temps dans les calculs.

La série harmonique.

Proposition

La série $\sum_{n \leq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Cette série fournit l'exemple le plus simple de série divergente non grossièrement.
Dans la suite du cours on notera $\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle de cette série. Il est important de connaître l'équivalent déjà donné :

$$\mathcal{H}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$$

I.4 Séries télescopiques

Proposition

Soit (u_n) une suite numérique. (u_n) converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim u_n - u_0$$

.

Ainsi, toute suite peut-elle être considérée comme la somme partielle d'une série. Ce fait nous fournit un nouvel outil pour étudier la convergence des suites. Une illustration de ce fait sera donnée un peu plus bas par la démonstration de la formule de Stirling.
On peut également noter le fait suivant :

Proposition

Toute suite qui tend vers zéro est le reste d'une série convergente.

Démonstration.

Dans les résultats ci-dessus, le téléscopage ne fait intervenir que les indices n et $n+1$. On peut bien sûr envisager des situations plus complexes ou davantage de termes interviennent. Dans ce cas là, il fuat écrire les sommes partielles et faire au cas par cas les décalages d'indice. En voici deux exemples : (oral des mines)

Exemple. Montrer l'existence et calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{H}_n}{n(n+1)}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+4}{n(n+1)(n+2)}$$

On peut aussi avoir recours parfois à la variante ci-après (à refaire à la main à chaque fois) qui permet de montrer l'existence d'une limite finie strictement positive :

Proposition (Télescopage logarithmique)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Alors, (u_n) converge vers $\ell > 0$ si et seulement si $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge.

Application : Formule de Stirling
La formule suivante doit impérativement être connue.

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Démonstration.

I.5 Convergence absolue.

Définition

On dit que $\sum u_n$ converge absolument lorsque $\sum |u_n|$ converge (valeur absolue ou module selon $\mathbb{K}$).

Le théorème qui suit est fondamental :

Théorème

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.

*Pourquoi ce théorème est il si important ? Parce que la série $\sum |u_n|$ est **à termes positifs**. Nous allons bientôt disposer de nombreux tests qui permettent d'étudier les séries à termes positifs*

I.6 L'espace $\ell^1(\mathbb{K})$, inégalités

On note $\ell^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum |u_n| \text{converge}\}$: c'est l'ensemble de toutes les séires absolument convergentes. La propriété principale de cet ensemble est que c'est un espace vectoriel :

Proposition

$\ell^1(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, l'application qui à (u_n) associe la somme de sa série est une forme linéaire.

Démonstration.

Inégalités sur les sommes.

Proposition

- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. On suppose que pour tout n on a $u_n \leq v_n$. Alors $\sum_0^\infty u_n \leq \sum_0^\infty v_n$. avec égalité si et seulement si pour tout n $u_n = v_n$

- Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors on a $|\sum_0^\infty u_n| \leq \sum_0^\infty |u_n|$ avec égalité si et seulement si les u_n sont de signe constant (d'argument constant dans le cas complexe).

Démonstration.

Exemple :
Montrons par exemple la double inégalité :

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$$

valable pour tout z complexe. Quels sont les cas d'égalité ?

II Techniques d'étude de la convergence pour les séries à terme positifs

La convergence absolue justifie que l'on s'intéresse plus particulièrement aux séries à termes positifs, dont l'étude va s'avérer beaucoup plus simple. Tout repose sur le lemme suivant :

II.1 Lemme de majoration

Proposition

Pour qu'une série à terme positifs $\sum_n u_n$ soit convergente il suffit que ses sommes partielles soient majorées par une constante **indépendante de** n :

$$\exists M > 0, \forall n, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$$

Remarque. Si une série à termes positifs diverge, alors ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

C'est encore vrai si les termes sont positifs à partir d'un certain rang.

C'est **faux** pour une série à termes réels **quelconques**.
Par exemple :

Un exemple : Montrer sans calcul la convergence de la série dont le terme général vaut 0 si n n'est pas une puissance de 2, et $\frac{1}{n}$ si n est une puissance de 2.

l'application directe de ce théorème permet souvent de conclure à la convergence cependant nous allons voir maintenant quelques théorèmes plus fins permettant d'être plus efficaces.

II.2 Premier test de convergence : le théorème de comparaison

Les théorèmes de cette section sont essentiels pour les séries.

Théorème

On se donne deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs.

- Si $u_n \leq v_n$ et que $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge
- Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et que $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge
- Si $u_n = o(v_n)$ et que $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Commentaires sur les hypothèses et le nom du théorème.

Remarques :
-Etant donné le caractère local de la convergence, positive à partir d'un certain rang suffit.
-Ces théorèmes de comparaison sont des conditions suffisantes de convergence et n'ont pas de réciproque.

Démonstration.

II.3 Comparaison à des séries de Riemann

Rappel :

Proposition

On appelle séries de Riemann les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, pour tout réel α.

Cette série est convergente si et seulement si $\alpha \in]1, +\infty[$

Ces séries sont particulièrement importantes pour montrer la convergence par comparaison.

Corollaire (règle $n^\alpha u_n$)

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\sum u_n$ converge.

Souvent on applique cette règle avec $\alpha = 2$ qui est la plus simple des séries de Riemann convergente.

II.4 Exemples d'utilisation.

-Pratiques : Trouver la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

$u_n = \frac{n+3}{(n+5)(n^2-7)}$

$u_n = \frac{3^n+\sin n}{3^n\sqrt{n}+2023\cdot 2^n}$

$u_n = e^{-\sqrt{n}}$

-Théoriques :
Soit $\sum u_n$ une série à terme positif. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer la convergence de la série $\sum u_n^2$ et de la série $\sum \sin u_n$.

II.5 Séries de Bertrand (HP)

Proposition

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ ou } \beta > 1 \end{cases}$$

Démonstration. Nous verrons le cas $\alpha = 1$ plus tard.
Comme ce théorème n'est pas au programme, l faut savoir faire la preuve dans des exemples. Commençons par deux d'entre eux :

$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^2 (\ln n)}$

$\sum_{n \geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$

Maintenant le cas général :

II.6 Deuxième test de convergence : La règle de D'Alembert

Lemme comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Proposition

Soit (u_n) une suite à terme strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers ℓ. Alors :

— Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge

— Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

— Plus précisément, si $\exists k < 1, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration.

Remarque. On utilise cette technique lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se simplifie bien. Lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne converge pas ou lorsque $\ell = 1$, on ne peut conclure.

Exemples divers et limites de la règle de d'Alembert

III Comparaison avec une intégrale

On dispose d'une fonction $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ monotone, au moins continue par morceaux (en pratique continue). On a donc les deux inégalités :

— Si f décroit sur $[n, n+1]$, $f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n+1)$

— Si f croit sur $[n, n+1]$, $f(n) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n+1)$

L'idée de ce paragraphe est de les utiliser pour étudier la série $\sum f(n)$.

III.1 Fonctions intégrables

Définition (provisoire)

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux à valeurs positives. On note $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On dit que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ lorsque $F(x)$ admet une limite finie en l'infini. On note dans ce cas :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples :

III.2 Troisième test de convergence : Théorème de comparaison série intégrale

Théorème

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et décroissante. Notons $u_n = f(n)$ et $S_n = \sum_{k=a}^{n} u_k$:
La série $\sum_{n \geqslant a} u_n$ converge si et seulement si f intégrable sur $[a, +\infty[$.

Démonstration.

III.3 Exemples d'utilisation

Exemples :

i. Montrer par deux méthodes différentes la convergence de la série de terme général $\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

ii. Cas litigieux des séries de Bertrand

III.4 Autres utilisations de la comparaison série intégrale dans le cas divergent

Les deux inégalités :

— Si f décroit sur $[n, n+1]$, $f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n+1)$

— Si f croit sur $[n, n+1]$, $f(n) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n+1)$

sont vraies indépendemment du fait que f soit integrable. La seue chose importante est que f soit **monotone.**

Cas divergent : equivalent de la somme partielle

Soir f décroissante positive. Supposons que la série $\sum f(n)$ est divergente. Dans ce cas, la somme $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ tend vers l'infini. On peut chercher à l'encadrer pour en avoir un équivalent :
Pour cela il n'est pas nécessaire de connaître par coeur un théorème, mais il faut se souvenir de la méthode suivante :

On part de l'inégalité : $\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$

En sommant **(attention aux indices)** on obtient :

à gauche :

à droite :

Si les termes de gauche et de droite sont équivalents, on trouve un équivalent de S_n.

Exemple. Equivalent de $\mathcal{H}_n$

Cas convergent : équivalent du reste

Cette fois ci, on suppose que f est intégrable (et toujours décroissante).
On part encore de l'inégalité : $\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n) \geqslant \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$

En sommant on obtient :

à gauche :

à droite :

Comme toutes les séries sont convergentes, on peut passer à la limite quand N tend vers l'infini :

Si les termes de gauche et de droite sont équivalents, on trouve un équivalent de S_n.

Exemple :

III.5 Une application : la constante γ

IV Sommation des relations de comparaison

Nous avons vu das le paragraphe précédent avec la comparaison série intégrale un outil permettant de calculer un équivalent de sommes partielles (divergentes) et de restes (convergents). Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence un procédé plus général pour obtenir des résultats analogues.

IV.1 Cas divergent

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que :

(i) $\sum v_n$ **diverge**
(ii) v_n est **positif** (au moins à partir d'un certain rang).

(v_n s'appelle la suite de comparaison)
On note $S_n(v) = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors :

— Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n(u) = o(S_n(v))$
— Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $S_n(u) = \mathcal{O}(S_n(v))$
— Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n(u) \sim S_n(v)$.

Autrement dit : sous les deux hypothèses données, la relation de comparaison du terme général se transmet aux sommes partielles.

Démonstration. Ce théorème n'est pas du tout trivial ! Cette difficile démonstration est à connaître.

IV.2 Cas convergent

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que :

(i) $\sum v_n$ **converge**
(ii) v_n est **positif** (au moins à partir d'un certain rang).

On note $R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ et $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Alors :

- Si $u_n = o(v_n)$, alors $R_n(u) = R_n(v))$
- Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $R_n(u) = \mathcal{O}(R_n(v))$
- Si $u_\sim v_n$, alors $R_n(u) \sim R_n(v)$

Démonstration

IV.3 Exemples d'utilisation

i. Trouver un équivalent de $S_n = \sum_1^n \arctan k$ puis un développement limité à deux termes de S_n

ii. (centrale) Soit u_n une suite de limite 1 telle que $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{n^2}$. Trouver un équivalent de $1 - u_n$.

Donnons pour terminer ce paragraphe une application à la fonction factorielle.

Exemple. Montrer le développement suivant :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

V Séries semi-convergentes – Séries alternées

V.1 Séries alternées

Définition

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est dite alternée lorsqu'il existe (α_n) de **signe constant** telle que $u_n = (-1)^n \alpha_n$.

il y a différentes façons d'écrire qu'une série est alternée.

Ces séries sont intéressantes en raison du théorème suivant

Théorème (Critère spécial des séries alternées – CSSA)

Soit $\sum u_n$ une série alternée de la forme $u_n = (-1)^n \alpha_n$. On suppose :

— (α_n) tend vers 0

— (α_n) décroit

Alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration.

V.2 Séries de Riemamm alternées

Proposition

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$

La démonstration est une application directe du critère spécial. Ces séries sont des séries de référence.

Résumé sur les séries de Riemann et séries de Riemann alternées :

V.3 Méthode pratique d'étude d'une série alternée

Méthode

i. Repérer que la série est alternée.
ii. Tester la convergence absolue (s'il y a convergence absolue, il n'y a plus rien à faire).
iii. Vérifier que le terme général tend vers 0
iv. Vérifier qu'il est décroissant (c'est le plus important, et le plus délicat en général)

Exemples

V.4 Majoration du reste

Théorème

Supposons que $\sum(-1)^n\alpha_n$ est une série alternée vérifiant les hypothèses du CSSA. Alors :

i. Les sommes partielles sont du signe de leur premier terme et majorées en valeur absolue par ce premier terme
ii. La somme de la série vérifie également ce résultat
iii. Le reste d'ordre n vérifie également ce résultat

Démonstration.

Exemple (Définition de π)**.** Pour tout x, On note $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Montrer que $C(2)$ est négatif. Ce résultat est à la base de la définition du nombre π

VI Séries semi-convergentes

VI.1 Définition

Définition

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ est semi-convergente lorsque $\sum u_n$ converge et que $\sum |u_n|$ diverge.

Remarque. Par ce qui précède, on a montré que de telles séries existaient (par exemple la série harmonique alternée est semi-convergente).
Elles sont difficiles à étudier puisque les théorèmes de comparaisons ne s'appliquent pas (elles ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang).

Nous ne proposerons pas de méthode générale d'étude de ces séries voici cependant quelques exemples d'étude de telles séries

VI.2 La technique du DL

Etudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Jusqu'a quel ordre pousser le DL ?

VI.3 La technique du regroupement de termes

Lorsque la série présente des termes de signe variable, il peut être utile de regrouper les termes deux par deux pour la simplifier (ou " par 3 etc....) Voici comment on procède sur un exemple.

VII Complements

Les résultats de cette section ne sont pas explicitement au programme. Leur étude augmentera considérablement votre maîtrise du cours sur les séries et vous préparera plus solidement aux écrits des concours

VII.1 L'espace $\ell^2(\mathbb{K})$. Inégalité de Schwarz

On pose $\ell^2(\mathbb{R}) = \{(u_n),\ \sum |u_n|^2 \text{ converge}\}$.
On sit qu'une telle série est de carré converent, ou bien que la suite $(u_n)_n$ est de carré sommable.

Le premier point intéressant est :

Proposition

Si (u_n) et (v_n) sont de carré sommable alors $\sum u_n v_n$ est convergente.

Démonstration.

Commentaire : il faut retenir l'idée majeure de cette démonstration :

On a la conséquence suivante :

Structure euclidienne

Proposition

$\ell^2(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

Si l'on pose (dans le cas réel) $\langle u_n | v_n \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$, on définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$

On a l'ingéalité de Cauchy Schwarz :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \right|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2 \right)$$

VII.2 Manipulation de tranches de Cauchy

Définition

Soit (u_n) une suite et soient n et p des entiers. La somme $C_{n,p} = \sum_{k=n}^{n+p} u_k$ s'appelle une tranche de Cauchy de $\sum u_n$.

L'intérêt des tranches de Cauchy réside dans la proposition presque évidente suivante :

Proposition

Soit (u_n) une suite de nombres complexes :
Si $\sum u_n$ converge alors les tranches de Cauchy "tendent vers zéro" i.e : $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall, n, p \geqslant n_0, |C_{n,p}| \leqslant \epsilon$

Démonstration.

Ce résultat s'utilise :
(i) Dans le cas des séries dont l'étude directe est difficile.
(ii) Presque toujours pour montrer la divergence ! En effet, il suffit pour celà de minorer des tranches de Cauchy d'indices arbitrairement élevés par une constante non nulle.

Exemple. Séries dont le terme général décroit :
Si u_n est une suite réelle décroissante et si $\sum u_n$ converge , alors $u_n = o(\frac{1}{n})$

Exemple. Soit r_n le nombre de chiffres de n. Etudier la série de terme général $\frac{(-1)^{r_n}}{n}$.

Le critère de Cauchy pour les séries (HP)

On a en fait le théorème suivant (Hors programme) qui donne une caractérisation des séries numériques convergentes.

Théorème

Soit (u_n) une suite de complexes. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. $\sum u_n$ converge
ii. $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall, n, p \geqslant n_0,\ C_{n,p} \leqslant \epsilon$

Démonstration.

VII.3 La transformation d'Abel (HP)

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On note $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k$$

Démonstration.

Corollaire

Si (V_n) est bornée et (u_n) est décroissante de limite nulle, alors $\sum u_n v_n$ converge.

Remarque. Lorsque la série des (v_n) converge, on peut procéder de même en considérant la suite (R_n) de ses restes plutôt que (V_n).

VII.4 Technique du groupement de termes (cas général)

Grouper les termes c'est remplacer u_n par $v_n = \sum_{k=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} u_k$, ou $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. on dit que v_n est un "paquet" de termes. On parle aussi de sommation par paquets.

Il y a deux théorèmes majeurs :

Théorème du groupement de termes (HP)

On se donne une série $\sum u_n$ On pose $v_n = \sum_{k=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} u_k$. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge également.

En termes simples : si la série converge, alors la série dont les termes auront été groupés est encore convergente , quelle que soit la façon de grouper les termes.

Démonstration.

La question délicate est donc de savoir si la réciproque est vraie : lorsque la série groupée converge, peut on dire si la série non groupée converge. Pas toujours!!! Penser à la série de terme général $(-1)^n$ et groupez les termes deux par deux.
En revanche on a les résultats suivants :

Proposition

Si (u_n) est positive, la série de terme général u_n converge si et seulement si la série groupée converge, et ceci quelle que soit la façon de grouper les termes.

Et plus généralement on a le théorème suivant :

Proposition

Si la série groupée converge, et que " la taille des paquets n'est pas trop grosse" dans le sens suivant :
$w_n = \sum_{k=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} |u_k|$ tend vers zéro (quand n tend vers l'infini (attention à la place des valeurs absolues)
Alors la série non groupée converge.

Comme ces théorèmes sont complexes, il est préférable, pour grouper les termes, de toujours revenir aux sommes partielles. Voyons ceci sur des exemples.

Exemple. A titre d'application, le lecteur pourra utiliser ce théorème pour étudier les séries suivantes.
- Étudier le comportement de $\sum \frac{a_n}{n}$ avec (a_n) 3-périodique.
- Étudier le comportement de $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \ln(n) \rfloor}}{n}$

VIII Familles sommables

Cadre : La notion de famille sommable est introduite dans le but :
— d'écrire $\sum_{i\in I} u_i$ indépendamment de l'ordre de sommation
— d'indexer par un ensemble I qui ne soit pas forcément $\mathbb{N}$

Les résultats majeurs ont été vus en première année et sont ici rappelés sans démonstration. Il est important de savoir les manipuler dans la pratique.

Le point réellement important à comprendre est la différence fondamentale entre le cas des nombres réels positifs , ou tout est facile, et le cas général.

VIII.1 Calcul dans $[0,+\infty]$

Nous commençon par introduire des opérations autorisant le "nombre" $+\infty$.

i. **Régles opératoires :**
-Pour tout réel positif a on a :
$$a+\infty=+\infty$$
-Pour tout réel strictement positif a on a
$$a\cdot+\infty=+\infty$$
-
$$+\infty+\infty=+\infty$$

ii. **Borne supérieure :**
si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de réels positifs ou nuls, deux situations peuvent se produire :

-La famille est bonée. dans ce cas elle a une borne supérieure $M=\sup_{i\in I} u_i$
-La famille est non bornée : dans ce cas on pose $+\infty=\sup_{i\in I} u_i$

VIII.2 Cas des familles de réels positifs

Dans tout ce paragraphe, on se donne $I\neq\emptyset$ un ensemble, et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs ou nuls.**

Définition Somme d'une famille de réels positifs

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
Losque J est une partie finie de I on pose $S_J=\sum_{j\in J} u_j$.
On pose alors
$$\sum_{i\in I} u_i=\sup_{\substack{J \text{ fini}\\ J\subset I}}\sum_{j\in J} u_j$$
Ceci défini un élément de $[0,+\infty]$ appelé somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$

Remarque. 1-Si I est fini, on retrouve bien la somme usuelle.
2-Faire bien attention au fait que cette définition n'est valide que lorsque les réels sont **positifs**
3-Cette définition n'est pas très pratique pour les calculs ;
4-La plupart des familles de réels ont une somme infinie. Par exemple si $I=\mathbb{N}$ et $u_i=1$ faisons la preuve

Les sommes de réels positifs se manipulent comme les sommes de réels :

Proposition (Opérations sur les sommes)

— Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et $J \subset I$. Alors $\sum_{j\in J} u_j \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

— Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I. On suppose que pour tout $i \in I$, $u_i \leqslant v_i$. Alors $\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$

— Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I. On a $\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

— Soient I et J deux ensembles disjoints. Soient $(u_i)_{i\in I\sqcup J}$ une famille de réels positifs.$\sum_{i\in I\cup J}(u_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in J} u_i$.

Ces opérations sont valides que les sommes soient finies ou non. Maintenant nous nous intéressons au cas ou les sommes sont finies :

Définition famille sommable

Une famille de réels positifs ou nuls est dite sommable lorsque sa somme est finie.

En conséquence de la proposition précédente sur les opérations entre somme, on a immédiatement les résutats suivants :

Proposition (Opérations sur les familles sommables)

— (sous famille) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs sommmable et $J \subset I$. Alors la sous famille $(u_i)_{i\in J}$ est aussi sommable.

— (comparaison) Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I. On suppose que pour tout $i \in I$, $u_i \leqslant v_i$. Dans ce cas, si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, il en st de même de $(u_i)_{i\in I}$

— (somme) Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables. La famille $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est également sommable et on a $\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

— (relation de Chasles) Soient I et J deux ensembles disjoints. Les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(u_i)_{i\in J}$ sont sommables si et seulement si la famille $(u_i)_{i\in I\cup J}$ est sommable

VIII.3 Les principaux théorèmes pour les familles positives

Proposition (Suites indexées par $\mathbb{N}$)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Cela veut dire que pour les séries **positives**, la sommabilité est une autre façon de voir la convergence (attention encore une fois à l'hypothèse de positivité). Dans ce cas on a égalité entre les deux écritures

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_0^\infty u_n$$

Proposition (Suites indexées par $\mathbb{Z}$)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de réels positifs. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable
ii. Les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_{-n}$ sont convergentes
iii. La série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n + u_{-n})$ est convergente
iv. La suite $\sum_{k=-n}^{n} u_k$ est majorée.

Dans ce cas on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_0^\infty u_n + \sum_1^\infty u_{-n} = u_0 + \sum_1^\infty u_n + u_{-n}$$

Proposition (changement dans l'ordre des termes positif)

Soient I et J deux ensembles dénombrables et $\phi : I \longrightarrow J$ bijective. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I. On pose $v_j = u_{\phi^{-1}(j)}$ pour $j \in J$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(v_j)_{j\in J}$ est sommable. Dans ce cas, on a égalité des sommes.

Corollaire

Si $\phi : I \longrightarrow I$ est bijective, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\phi(i)})_{i\in I}$ est sommable, et dans ce cas les sommes sont égales.

La bijection ϕ correspond à une permutation de l'ensemble des indice dans ce second cas :autrement dit l'ordre de sommation n'a pas d'importance (attention là encore nous avons affaire à des suites à termes positifs. Nous verrons que c'est faux dans le cas contraire)

Théorème de sommation par paquets positif

Soit I un ensemble d'indices. On suppose que I est la réunion disjointe d'une famille de sous ensembles,$I = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ avec Λ un ensemble d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
Dans tous les cas, on a dans $[0,+\infty]$ l'égalité

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} u_i\right)$$

De plus, il est équivalent de dire :

i. $(u_i)_{i\in I}$ est sommable

ii. $\forall\,\lambda\in\Lambda$, $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et si l'on note sa somme S_λ, la famille $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable.

Ce théorème est le plus important : il exprime que l'on peut découper l'ensemble d'indices I en sous ensembles de n'importe quelle façon, cela n'affectera ni la sommabilité, ni la valeur de la somme.

Suites doubles et théorème de Fubini positif

Dans cette section l'ensemble I est égal à $I = \mathbb{N}^2$. Ainsi les élements de I sont des couples (p,q) d'entiers. On parle alors de **suite double** et l'on écrit $u_{p,q}$ à la place de u_i.

Théorème (Fubini positif)

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs. On a dans $[0,+\infty]$l'égalité :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

En particulier,il est équivalent de dire :

i. $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable

ii. pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{q\geqslant 0} u_{p,q}$ converge, et en notant S_p sa somme, la série $\sum_{p\geqslant 0} S_p$ converge.(on dit qu'on fait une sommation à p constant. on peut aussi de façon équivalente sommer à q constant c'est à dire inverser le rôle de p et q).

Rappelons la preuve de cet important résultat :
On pose $I_n = \{n\}\times\mathbb{N}$ et $J_q = \mathbb{N}\times\{q\}$.

Examinons quelques exemples de ces important théorème :

Exemple.

VIII.4 Familles sommables de nombres complexes

Après le cas des suites positives, examinons le cas général : la stratégie est simple on se ramène par définition au cas positif. D'où la définition.

Définition

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Ceci fait, il faut définir la somme de la famille : c'est plus difficile car on ne peut plus prendre la borne supérieure. Ceci nécessite un théorème.

Théorème Existence et définition de la somme d'une famille sommable

Soit $(u_j)_{j\in I}$ une suite sommable.

On peut écrire u_j sous la forme
$$u_j = a_j + b_j + i(c_j + d_j)$$
avec a, b, c, d familles sommables à termes positifs.

On pose alors par définition :

$$\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I} a_j + \sum_{j\in I} b_j + i\sum_{j\in I} c_j + i\sum_{j\in I} d_j$$
.

Esquisse de preuve :

Remarque :
1) Cette définition n'est pas utile en pratique pour calculer les sommes : elle sert juste à prouver leur existence.
2) Attention, en cas de famille non sommable **il n'est plus possible d'écrire** $\sum_{j\in I} u_j = +\infty$ **!!!**. c'est une différence avec le cas positif.

VIII.5 Les principaux théorèmes pour les familles quelconques

Ces théorèmes sont identiques aux théorèmes du cas positif, à la différence près qu'ils ne sont valables que dans le cas où les suites sont sommables.

Proposition (convergence commutative)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes sommable et ϕ une permutation de l'ensemble I. Alors la famille des $(u_{\phi(i)})_{i\in I}$ est sommable et a la même somme.

Autrement dit, la somme d'une famille sommable d'éléments ne dépend pas de l'ordre des éléments. Nous verrons pous tard un contre exemple très spectaculaire dans le cas non sommable.

Proposition (linéarité)

Supposons que $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de complexes, et a un scalaire. Alors $(u_i+av_i)_{i\in I}$ l'est également, et $\sum_{i\in I}(u_i + av_i) = \sum_{i\in I} u_i + a\sum_{i\in I} v_i$.

Proposition (Inégalité triangulaire)

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors :

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$$

Théorème de sommation par paquets

Soit I un ensemble. On suppose que I est la réunion disjointe d'une famille de sous ensembles, $I = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ avec Λ ensemble d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Pour que la famille $(u_i)_{i\in I}$ soit sommable il faut et il suffit que :

i. $\forall\,\lambda \in \Lambda$, $(u_i)_{i\in I}$ soit sommable.
   Ceci autorise à définir $S_\lambda = \sum_{i\in I_\lambda} |u_i|$.
   (Attention à la valeur absolue !!!!)

ii. la famille (S_λ) soit sommable.

Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} u_i\right)$$

Sans valeur absolue cette fois ci !!

Théorème de Fubini

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de complexes. Pour que cette famille soit sommable il faut et il suffit que :

i. pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q\geqslant 0} |u_{p,q}|$ converge.
   Ceci autorise à définir sa somme $S_p = \sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$ (avec valeurs absolues)

ii. la série $\sum_{p\geqslant 0} S_p$ converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

(sans valeurs absolues)

Exemple. .

VIII.6 Application aux séries absolument convergentes

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique (c'est à dire que $I = \mathbb{N}$)
cette suite est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est **absolument** convergente

Attention, les séries semi convergentes telles que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ne sont pas sommables.

On déduit alors des propriétés des familles sommables le théorème suivant :

Proposition Convergence commutative

Soit $\sum u_n$ une série **absolument** convergente, alors pour toute permutation des terme ϕ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\phi(n)}$$

La somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre des termes (c'est ce qui autorise à écrire $\sum_{n\in\mathbb{N}}$)

contre intuitivement, ce fait est faux pour les série semi convergentes ! Voici un contre exemple de référence.

VIII.7 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Posons :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

La série $\sum w_n$ s'appelle produit de Cauchy de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$.

On peut aussi adopter une autre notation souvent plus comode car plus symétrique :

Théorème

On conserve les notations précédentes. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **absolument** convergentes, alors $\sum w_n$ l'est aussi. De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration.

Un exemple remarquable : l'exponentielle