Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de ce chapitre est de définir l'intégrale (lorsqu'elle existe) d'une fonction définie sur un intervalle qui n'est pas un segment. Cette construction utilise l'intégrale de Riemann sur les segments vue en première année. Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Toutes les propriétés de l'intégrale vue en première année sont supposées connues. En particulier, les techniques de calcul (Intégrations par parties et changements de variables usuels).

I Vocabulaire

Définition

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux sur I si elle l'est sur tout segment de I.

C'est à dire que sur tout segment de I,

1) f possède un nombre fini de discontinuités.
2) possède une limite à gauche et une limite à droite en chacun de ces points.

Ainsi, on a bien sûr d'après le cours de première année :

Proposition

Si f est continue par morceaux sur I,

$$\forall\, [a,b] \subset I,\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe}$$

Remarques :
1) Lorsque l'intégrale de Riemann existe sur tous les segments de I on dit parfois que f **est localement intégrable.**
2) On peut trouver des fonctions dont l'intégrale de Riemann existe et qui ne sont pas continues par morceaux. Ceci dépasse le cadre du programme.

Question : que se passe t'il si l'intervalle n'est pas un segment ?

II Construction dans le cas d'un intervalle semi-ouvert

Dans cette partie, on considère $I = [a, b[$ ou $I =]b, a]$ un intervalle semi-ouvert, et f une fonction continue par morceaux sur I.
Il y a à priori deux types de difficulté (figure) :
-le cas où $b = \pm\infty$ (l(infini est une borne toujours impropre).
-le cas où b est finie, mais f n'est pas continue en b.

b s'appelle la **borne impropre.**

Pour l'instant, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'a donc pas de sens à cause de la borne b. On l'appelle une intégrale impropre et on souhaite savoir si elle a un sens.

II.1 Définition

Définition

Lorsque $I = [a, b[$ (borne supérieure impropre) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe ou converge lorsque $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
Dans tous les autres cas on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Dans le cas où la borne impropre est à gauche, on définit de façon analogue la convergence de l'intégrale de f sur $]b, a]$ comme $\lim_{x\to b^-} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

II.2 Exemples de référence et commentaires

Les exemples de cette section sont importants et doivent être connus.

Proposition (Riemann)

l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$converge si et seulement si $\alpha > 1$.

l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition (exponentielles en l'infini)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 0$.

Proposition (logarithme en 0)

$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

II.3 Propriétés élémentaires

On écrit ces propriétés pour l'intervalle $[a, b[$ semi ouvert à droite. Il faut savoir les écrire pour l'intervalle semi ouvert à gauche.

Proposition (linéarité)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\int_a^b f(t) + \lambda g(t)dt$ converge (et vaut ce qu'on pense...)

Que se passe t'il si l'une des intégrales diverge ? Si les deux divergent ?

Proposition (Caractère local de la convergence et relation de Chasles)

On se place sur $I = [a, b[$. Soit $c \in I$. $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_c^b f$ converge.

En cas de convergence, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Ceci signifie que la convergence d'une intégrale dépend uniquement du comportement de $f(x)$ **au voisinage de la borne impropre**

Proposition (Positivité)

On suppose que f est positive sur I. Alors $\int_I f \geqslant 0$.
De plus, si f est **continue** sur I et non identiquement nulle, alors $\int_I f > 0$.

Proposition (reste d'une intégrale convergente)

On suppose que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Alors $R(x) = \int_x^b f(t)dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers b.

la fonction R s'appelle le **reste de l'intégrale.** Elle n'est définie que lorsque l'intégrale est convergente.

Outre la limite en b, Il faut connaître la **dérivée du reste** :

II.4 Une différence entre les bornes finies et infinies

Proposition (Prolongement continu)

Si b est une borne **finie** et si f a une limite **finie** en b, alors $\int_a^b f$ converge

Ceci ne vaut pas pour une borne impropre infinie!! La conséquence est que les cas "intéressants" d'intégrale impropre en une borne finie b sont ceux pour lequels f a une limite infinie au voisinage de b (ou pas de limite du tout).

Exemples

Cas d'une borne infinie

Contrairemet à la première intuition, il n'y a pas de notion de divergence grossière pour les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} f \text{ converge} \not\Longrightarrow f(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Exemple

En revanche, si ceci se produit, f ne peut pas avoir un comportement "trop simple" au voisinage de l'infini puisque :

Proposition

Si f a une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ et que $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors nécessairement $\ell = 0$.

Ainsi, dans presque tous les cas, les fonctions intégrable au voisinage de l'infini vont tendre vers 0, même s'il existe des contrexemples.

Un résultat classique (HP) :
lorsque f est décroissante, on a même un résultat plus fort :

Proposition

Si f est monotone en $+\infty$ et si $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $f(x) = o(\frac{1}{x})$.

II.5 Caractérisation séquentielle. Transformation en série

la proposition suivante traduit le caractère séquentiel de la limite.

Proposition

Soit f localement intégrable sur $[a, b[$.
L' intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si pour tout suite croissante (b_n) tendant vers b on a de façon équivalente

-la suite de terme général $\int_a^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

-La série de terme général $\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Le second point est souvent utile, en particulier pour les intégrales sur $[0, +\infty[$.
On a en particulier le résultat suivant :

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \sum \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

On peut remplacer n par n'importe que b_n qui tend vers l'infini.

Cette propriété est difficile à utiliser dans le cas général pour montrer la convergence d'une intégrale : en effet, on doit démontrer la convergence de la série terme général $\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour **toutes les suites qui tendent vers b**.
En revanche dans le cas des fonctions à valeurs positives, cette proposition est grandement simplifiée car pour prouver la convergence de l'intégrale :

Proposition

Soit f localement intégrable sur $[a, b[$ à valeurs positives.
L' intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si **il existe une suite croissante** (b_n) tendant vers b telle que l'une des deux propriétés suivante aie lieu.

-la suite de terme général $\int_a^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

-La série de terme général $\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

C'est faux pour une fonction non positive comme le prouve l'exemple de $f(x) = \cos x$ sur l'intervalle $\mathbb{R}+$ en prenant la suite $b_n = n\pi$.

II.6 Tranches de Cauchy pour les intégrales

Définition

On se place sur $I = [a, b[$. Une tranche de Cauchy de $\int_a^b f$ est une intégrale $\int_x^y f$ avec $a \leqslant x < y < b$.

Illustration d'une tranche de Cauchy :

Pour qu'une intégrale converge il faut que les tranches de Cauchy "tendent vers 0" :

Démonstration :

La proposition suivante, hors programme (mais que vous pouvez utiliser), exprime que la réciproque est aussi vraie :

Proposition

- On considère $b = +\infty$. $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall\, X > A,\ \forall\, Y > A,\ \left|\int_X^Y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \epsilon$$

- On considère $b \in \mathbb{R}$. $\int_a^b f$ converge si et seulement si :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall\, X \in]b-\eta, b],\ \forall\, Y \in]b-\eta, b],\ \left|\int_X^Y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \epsilon$$

Exemples d'utilisation

III Cas des fonctions à valeurs positives

Ce paragraphe est identique à celui sur les séries.

III.1 Lemme de majoration

Lemme

Soit $I = [a, b[$ un intervalle semi-ouvert. Soit f positive sur I et localement intégrable. Alors :

$$\int_a^b f \text{ converge } \iff \exists M > 0,\ \forall x \in [a, b[,\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

Exemple. On retrouve la caractérisation avec les suites :
Soit f positive sur $[a, +\infty[$. Il est équivalent de dire :

- $\int_a^{+\infty} f$ converge
- il existe une suite (u_n) tendant vers l'infini telle que $(\int_a^{u_n} f)$ converge.

III.2 Théorème de comparaison

Théorème

On se place sur $I = [a, b[$ ou $]a, b]$. On suppose que f et g sont positives et localement intégrables sur I. Alors :

$$0 \leqslant g \leqslant f \quad \Longrightarrow \quad \left(\int_a^b f \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b g \text{ converge}\right)$$

Corollaire

On en déduit alors, avec les mêmes hypothèses :

- Si $g(t) = o_b(f(t))$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $\int_a^b g$ converge
- Si $g(t) = \mathcal{O}_b(f(t))$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $\int_a^b g$ converge
- Si $g(t) \sim_b f(t)$, alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_a^b g$ converge

Démonstration.

III.3 Utilisation de la comparaison aux intégrales de Riemman

Proposition (Riemann en l'infini)

Soit f localement intégrable sur $[a, +\infty[$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$t^\alpha f(t)$ tende vers 0 ou
$f(t) \sim \dfrac{C}{t^\alpha}$ lorsque t tend vers l'infini,

alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Proposition (Riemann en zéro)

Soit f localement intégrable sur $]0, a]$. S'il existe $\alpha < 1$ tel que :

$t^\alpha f(t)$ tende vers 0 ou
$f(t) \sim \dfrac{C}{t^\alpha}$ lorsque t tend vers l'infini,

alors $\int_0^a f$ converge.

Proposition (Riemann en une borne finie)

Soit f localement intégrable sur $]b, a]$ (ou $[a, b[$). S'il existe $\alpha < 1$ tel que :

$|t-b|^\alpha f(t)$ tende vers 0 ou
$f(t) \sim \dfrac{C}{|t-b|^\alpha}$ lorsque t tend vers l'infini, lorsque t tend vers b,

alors $\int_a^b f$ converge.

Exemples :

Proposition (Intégrales de Bertrand)

On s'intéresse à la fonction suivante :

$$f : t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$$

— $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si ($[\alpha > 1]$ ou $[\alpha = 1$ et $\beta > 1]$)
— $\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si ($[\alpha < 1]$ ou $[\alpha = 1$ et $\beta > 1]$)

Ce résultat hors programme peut être utilisé sans justification. Cependant La preuve doit être connue.

IV Fonctions intégrables

L'intégrabilité est l'analogue pour les intégrales de la convergence absolue et la sommabilité pour les séries et familles sommables.

IV.1 Définition

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est intégrable sur $[a, b[$, ou que $\int_a^b f$ est absolument convergente, lorsque $\int_a^b |f|$ converge (On donne la même définition sur $]b, a]$).

L'espace des fonctions intégrables
On note $\mathcal{L}^1([a, b[, \mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathcal{L}^1([a, b[)$ l'ensemble des fonctions sur $[a, b[$ (à valeurs dans $\mathbb{K}$) continues par morceaux et intégrables. On vérifie facilement que :

Proposition

$\mathcal{L}^1([a, b[)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

IV.2 Intégrale d'une fonction intégrable

L'intérêt de l'intégrabilité repose sur le théorème suivant :

Théorème

Si f est une fonction intégrable sur $[a, b[$, alors l'intégrale de f converge sur $[a, b[$.

Démonstration.

Remarque. La réciproque n'est pas vraie, et il est possible que l'intégrale de f converge sans qu'elle soit intégrable. Nous verrons bientôt l'exemple de référence suivant : $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ sur $]0, +\infty[$.

Voici deux applications particulières du résultat précédent qui servent régulièrement :

IV.3 Intégrabilité d'une dérivée

Proposition

Soit f de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$. On suppose que f' est intégrable sur $[a, b[$. Alors f a une limite finie en b.

Exemple. On pourra à titre d'application résoudre l'exercice très classique suivant :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [0, +\infty[$. On suppose que f et f' sont intégrables sur I. Montrer que f tend vers 0 en l'infini.

IV.4 Intégrabilité des fonctions bornées sur les intervalles bornés

Proposition

Si a et b sont finis, et que f est continue par morceaux et bornée sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

IV.5 Résumé du plan d'étude d'une borne impropre dans une intégrale

Pour conclure ce paragraphe, voici un résumé méthodologique de l'étude d'un borne impropre.

Méthode

Pour étudier la nature de l'intégrale de f sur $[a, b[$:

i. Vérifier que f est bien continue par morceaux sur $[a, b[$

ii. Tester d'abord l'intégrabilité sur $[a, b[$. Pour cela :
   - On simplifie avec un équivalent ou un majorant de $|f(x)|$
   - On applique le théorème de comparaison.

iii. Si f n'est pas intégrable, ou si on n'a pas pu conclure, revenir à l'intégrale partielle, la primitive $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et étudier sa limite.

V Intégrales à plusieurs bornes impropres

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions définies sur $]a, b[$.

V.1 Définitions

Définition

Si $I =]a, b[$ et que f est localement intégrable sur I, alors on dit que $\int_a^b f$ converge lorsque $\int_a^c f$ converge et $\int_c^b f$ converge pour $c \in]a, b[$. On définit de façon analogue la notion d'intégrabilité sur $]a, b[$.

Exemples
Déterminer la nature de $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan t}}{t} \, \mathrm{d}t$.
Déterminer la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{zt}}{t^a} \, \mathrm{d}t$.

Dans chaque situation, la méthode est la même :

- Repérer les bornes impropres
- En chaque borne impropre appliquer la méhtode vue à la partie précédente.

Remarque sur l'intégrabilité En ce qui concerne l'intégrabilité, on peut la montrer simultanément pour toutes les bornes impropres : Pour que f soit intégrable sur $]a, b[$ il sufit de trouver une constante M telle que pour tout $[c, d] \subset]a, b[$ on ait

$$\int_c^d f(t) \, \mathrm{d}t \leq M$$

VI Intégration par partie et Changement de variable

VI.1 Changement de variable

Théorème

Soit $\phi : [a, b[\longrightarrow [c, d[$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[c, d[$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$ converge

ii. $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

En cas de convergence, les deux intégrales sont égales. Il en est de même pour l'intégrabilité.

Retenir : On peut faire les changement de variables C^1 **bijectifs** dans les intégrales impropres sans justification supplémentaire.

VI.2 Intégration par partie

Théorème

Soient f et g des fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1_{\mathrm{pm}}$ sur $[a, b[$. On s'intéresse aux quantités suivantes :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \Big[f(t)\,g(t)\Big]_a^b$$

Si deux de celles-ci existent, alors la troisième existe également, et on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\,g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Retenir :En pratique, on fait toujours l'intégration par partie sur $[a, x]$ avant de faire ensuite tendre x vers la borne impropre.

Exemple (La fonction Gamma)**.** On pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Il peut arriver que l'intégration par partie conduise à une intégrale divergente : dans ce cas, faire attention.
Exemple : Que se passe t'il avec $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt$?

VII Intégrales semi convergentes

VII.1 Definition

Définition

L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite semi convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

Ces intégrales sont difficiles à étudier car les théorème de comparaison ne s'appliquent pas. Il faut donc une autre méthode.

VII.2 L'exemple de référence

Cet exemple et les méthodes présentées ci après doivent être connus.

Proposition

L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi convergente.

Démonstration par deux méthodes :

VIII Intégration des relations de comparaison

Ce paragraphe est analogue à celui sur les séries.

Proposition (cas divergent)

On suppose :
- f est positive sur $[a, b[$
- $\int_a^b f$ diverge

Alors :

i. $g(x) = o_b(f(x)) \Longrightarrow \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = o_b\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$

ii. $g(x) = \mathcal{O}_b(f(x)) \Longrightarrow \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}_b\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$

iii. $g(x) \sim_b f(x) \Longrightarrow \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \sim_b \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Proposition (cas convergent)

On suppose :
- f est positive sur $[a, b[$
- $\int_a^b f$ converge

Alors :

i. $g(x) = o_b(f(x)) \Longrightarrow \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t = o_b\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$

ii. $g(x) = \mathcal{O}_b(f(x)) \Longrightarrow \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}_b\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$

iii. $g(x) \sim_b f(x) \Longrightarrow \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t \sim_b \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple. Donner un équivalent en $+\infty$ de $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$ et un équivalent en 0^+ de $\arccos(1-x)$.

IX Compléments

IX.1 Cas des fonctions à valeurs complexes

Proposition

Pour que l'intégrale sur un intervalle I d'une fonction à valeurs complexes f soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale de partie réelle et sa partie imaginaire le soient.

Pour qu'une fonction à valeurs complexes f soit intégrable, il faut et il suffit que sa partie réelle et sa partie imaginaire le soient.

De plus on a

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \int_I \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

IX.2 Fonctions de carré intégrable.

On note $\mathcal{L}^2(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I de carré intégrable, c'est à dire telles que

$$\int_I |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

soit convergente.

La principale propriété de cet ensemble est la suivante :

Proposition

Si f et g sont de carré intégrable, alors fg est intégrable.

$\mathcal{L}^2(I)$ est un espace vectoriel.

On dispose de plus de l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\left|\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \left(\int_I |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_I |g(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)$$

IX.3 Technique du DL

La technique vue sur les séries pour montrer la convergence s'applique aussi pour les intégrales.

Exemple

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x} \,\mathrm{d}x$$

est convergente.