Séries et familles sommables

Un peu d'histoire : Francois Viète (1540-1603)

Avant tout homme politique et conseiller d'Henri IV, Francois Viète est aujourd'hui considéré comme le père de l'algèbre moderne. C'est à lui qu'on doit la formulation des expressions algébriques, avec en particulier l'introductions des lettres (a,b,x,y...) pour désigner les inconnues. Au premier abord, on pourrait trouver cette contribution modeste, en regard des découvertes mathématiques majeures. Pourtant, si tout ce qui se conçoit bien s'énonce clairement, le seul fait de donner un cadre formel et une représentation simple des objets mathématiques a permis une avancée décisive dans les méthodes algébriques. Songez qu'avant lui l'équation $x^2 + ax = b$ s'écrivait : " un carré plus une chose est égale à un nombre", et essayez alors de la résoudre !

Convergence et calculs de sommes.

Pour chacune des suites $(u_n)_n$ suivantes, on demande d'établir la convergence et de calculer la somme S

1. $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$. Pour cet exemple, après avoir prouvé la convergence on calculera $2S$ en fonction de S à l'aide d'un décacalage d'indice.

2. (Mines) $u_n = \ln(\dfrac{n^3-1}{n^3+1})$ (on remarquera les factorisations par $n-1$ au numérateur et $n+1$ au dénominateur et on fera un télescopage)

3. (Centrale)
   $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ (effecTuer une décomposition en éléments simples)

4. On pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)\dots(n+q)}$, où $q \in \mathbb{N}^*$
   Montrer que $\displaystyle\sum_1^{\infty} u_n = \frac{1}{qq!}$ (on pourra calculer $u_n - u_{n+1}$)

Séries positives. Convergence sans calcul de somme : Exercices pratiques

Dans les exercices suivants, on demande de déterminer la nature de la série de terme général u_n

5. (exercices élémentaires)

   a : $u_n = \dfrac{2n-3}{3n^3+n^a}$ ($a > 0$)
   b : $u_n = \dfrac{1}{n^a}\ln(1+\sqrt{n})$ $(a > 0)$
   c : $u_n = \dfrac{3^n - n^2}{4^n + n}$
   d : $u_n = \dfrac{7^{\sqrt{n}}}{(2n+1)!}$
   e : $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$ $(a > 1)$
   f : $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$
   g : $u_n = e^{\frac{1}{n}} - a - \dfrac{b}{n}$,$(a, b) \in \mathbb{R}$
   h : $u_n = \dfrac{a}{2n+b} + \dfrac{c}{n}$,$(a, b, c) \in \mathbb{R}$

6. (exercices plus difficiles)

   a : $u_n = e^{an}(1 - \dfrac{b}{n})^{n^2}$ $(a, b) \in \mathbb{R}$
   b : $u_n = 2^{-\sqrt{n}}$
   c : $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$
   d : $u_n = \dfrac{P(n)}{n!}$, P polynôme
   e : $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^{2n} - (1 + \dfrac{2}{n+a})^n$
   f : $u_n = \dfrac{n^2}{(\ln(n!))^3}$

7. $u_{n+1} = \dfrac{\sin(u_n)}{2}$, u_0 réel fixé (on commencera par jusitifier que U_n tend vers 0.

8. On donne une suite u_n telle que $u_{n+1} = \sin u_n$, u_0 réel fixé. On a montré dans une fiche précédente que u_n tend vers 0. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^3$.

9. (mines) Etudier selon a, b la convergece de la série de TG $u_n = \sum \dfrac{\lfloor (n+1)^a \rfloor - \lfloor n^a \rfloor}{n^b}$ $(a, b > 0)$.

10. Etudier la nature de la série définie par les conditions $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ sinon} \end{cases}$

11. Etudier la nature de la série définie par les conditions$u_n = 0$ si n n'est pas un carré, et $u_n = \dfrac{1}{n^a}$ sinon.

12. *difficile.* Etudier la nature de la série définie par les conditions $u_n = 0$ si n n'a pas le chiffre 9, et $u_n = \dfrac{1}{n}$ sinon.

Sommation des relations de comparaison

13. Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{n+1}^{\infty} \sin(\dfrac{1}{k(k+1)})$.

14. Soit $u_n = \sum_{n}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$. Montrer que u_n est équivalent à $\dfrac{1}{n!}$

15. Soit $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que S_{n+1} est équivalent à $2S_n$. En déduire un équivalent de S_n

16. On considère les suites définies par leurs premiers termes strictement positifs et les récurrences :
$u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{v_n}$, $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{u_n}$.
On souhaite montrer que toutes les deux tendent vers l'infini. Pour cela on suppose par l'absude par exemple que v_n ne temd pas vers l'infini.
Montrer que v_n converge vers une limite non nulle a.
En utilisant une sommation de relation de comparaison, montrer que $u_n \sim \dfrac{n}{l}$.
En déduire une contradiction.

17. Soit (u_n) une suite positive telle que $\lim n u_n(u_1 + \ldots + u_n) = \dfrac{1}{2}$
On se propose de trouver un équivalent de u_n.

    (a) On suppose que la série de terme général u_n est convergente. Montrer qu'il existe une constante C telle que $u_n \sim \dfrac{C}{n}$. En déduire une contradiction.

    (b) En déduire que la suite u_n converge vers 0 et que la série de terme général u_n diverge.

    (c) On note $S_n = u_1 + \ldots + u_n$. Montrer que $(S_{n+1} - S_n)S_n$ est équivalent à $\dfrac{1}{2}(\ln(n+1) - \ln(n))$ quand n tend vers l'infini.

    (d) En déduire que $\displaystyle\int_{S_n}^{S_{n+1}} t dt \sim \dfrac{1}{2}(\ln(n+1) - \ln(n))$ quand n tend vers l'infini.

    (e) En appliquant le théorème de sommmation des relations de comparaison, trouver un équivalent de $\dfrac{1}{2}S_n^2$, puis finalement, un équivalent de u_n.

Series alternées

18. Etudier les série de terme général u_n suivante, soit en utilisant soit la régle des séries alternées, soit la régle du développement limité :

a : $u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^a}$

b : $u_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

c : $u_n = \dfrac{(-1)^n n^a}{n^b + (-1)^n}$, $(b > 0)$

d : $u_n = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}\right)$

19. Séries alternées cachées
Etudier la nature des séries de terme général

a : $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

b : *difficile.* $u_n = \sin(\pi(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$

c : *difficile.* $u_n = \sin(\pi e n!)$

20. Etudier les série de terme général u_n suivante :

a : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n})$.

b : $u_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

c : $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$

d : $u_n = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}\right)$

21. $u_n = \dfrac{\alpha_n}{n}$ avec $\alpha_n = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est multiple de } 3 \\ -1 \text{ si } n = 3k+1 \\ -1\text{si } n = 3k+2 \end{cases}$

22. Série des restes. Un exemple.
On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
    (a) Justifier l'existence de u_n
    (b) Montrer que u_n tend vers 0 et que $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ avec $v_n > 0$
    (c) Ecrire $v_{n+1} - v_n$ comme reste d'une série alternée convergente et en déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

23. *difficile.* Séries des restes(2).
On suppose que la suite (a_n) décroit vers 0 , que $a_n \sim a_{n+1}$ et et que la suite $(a_n - a_{n+1})$ décroit.
Démontrer que le reste $r_n = \displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ est bien défini.
En examinant la somme $r_n + r_{n+1}$, démontrer que $r_n \sim \dfrac{(-1)^{n+1} a_{n+1}}{2}$.

24. Contrexemples aux théorèmes sur les séries positives.
On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$, $w_n = \dfrac{1}{n}$
Répondre aux questions suivantes :
    (a) La série de TG u_n est elle alternée ? Vérifie t'elle le critère spécial ? Est elle convergente ?
    (b) La série de TG v_n est elle alternée ? Vérifie t'elle le critère spécial ? Est elle convergente ?
    (c) Est il vrai que $u_n \sim v_n$? Que $w_n = o(u_n)$?
    (d) Que penser des théorème de comparaison pour les séries de signe variable ?

Exercices généraux sur les séries à termes positifs

25. Soit $(a_n)_n$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

    Montrer que les séries :
    $$\sum_{n\geq 0} a_n^2, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n} \quad \sum_{n\geq 0}(e^{\tan a_n}-1)$$
    sont convergentes.

26. Soit $\sum u_n$ une série positive convergente. On suppose que u_n décroit.

    (a) Montrer que $n.u_{2n} \leq \sum_{n}^{2n} u_k$.

    (b) Trouver de façon analogue une majoration de nu_{2n+1}.

    (c) En déduire que $u_n = o(\frac{1}{n})$.

    (d) Montrer par un contrexemple que ceci est faux sans l'hypothèse de décroissance.

27. *Critère de condensation de Cauchy*

    Soit (u_n) une suite décroissante positive.

    Comparer $2^n u_{2^n}$ aux sommes $\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k$ et $2\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_k$

    En déduire l'équivalence :$\sum u_n < +\infty \Leftrightarrow \sum 2^n u_{2^n} < +\infty$

    Application : Montrer la divergence de $\sum \frac{1}{n\ln n}$

28. *Critère de condensation (2)*

    Soit (u_n) une suite décroissante positive. Montrer l'équivalence :
    $$\sum u_n < +\infty \Leftrightarrow \sum n u_{n^2} < +\infty$$
    On appliquera une méthode analogue à celle de l'exercice précédent.

    difficile. Proposer une généralisation en remplaçant n^2 par $f(n)$, f étant une fonction strictement croissante.

29. *Utilisation de l'inégalité de Schwarz.*

    Soit (a_n) une suite positive. On suppose que $\sum a_n^2$ converge.

    Démontrer que la série de terme général $\frac{a_n}{n}$ est convergente.
    Déterminer une constante C indépendante de la suite (a_n) telle que
    $$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n} \leq C\sqrt{\sum_1^\infty a_n^2}$$

30. *Téléscopage logarithmique*

    Cet exercice met à profit le résultat suivant :
    $$\sum \ln(\frac{v_{n+1}}{v_n})\text{converge} \Leftrightarrow (v_n)\text{converge dans } \mathbb{R}+^*$$

    (a) Démontrer ce résultat.

(b) Application 1 : Règle de Raabe Duhamel faible :

on suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{l}{n} + v_n$ avec $\sum v_n$ absolument convergente.

Montrer en utilisant ce résultat qu'il existe une constante strictement positive K telle que $u_n \sim \dfrac{K}{n^l}$.

(c) En utilisant la régle de Duhamel faible étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{b.(b+1)....(b+n)}{a.(a+1)....(a+n)}$

(d) Application 2 : Soit (u_n) une suite positive vérifiant la récurrence

$$u_{n+1} = \sin(\frac{u_n}{2})$$

Montrer qu'existe une constante A telle que $u_n \sim \dfrac{A}{2^n}$

31. *classique.* Soit $\sum u_n$ une série positive , dont la somme partielle d'ordre n est notée S_n.

(a) Que dire de la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ lorsque $\sum u_n$ converge ?

(b) Que dire de la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ lorsque $\sum u_n$ diverge (on étudiera pour cela la série de terme général $\displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t}$ et on fera une comparaison série intégrale)

(c) Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^2}$ est toujours convergente. (on pourra introduire la série de TG $\displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^2}$)

(d) Plus généralement, étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^a}$

32. Utilisation d'équivalents(Mines)
Soit a_n une suite positive, et u_n la suite de premier terme positif et vérifiant $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a_n.u_n}$
Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

33. Equivalence suite série
Existe t'il une suite (a_n) divergente telle que $|a_{n+1} - a_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$?

Exercices complémentaires divers.

34. *classique. difficile.* Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ sur lui même.

(a) Etudier la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\sigma(n)}$
indication : utiliser judicieusement l'inégalité $2xy \leq x^2 + y^2$

(b) Etudier la série de terme général $u_n = \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$
indication : minorer la somme des termes pour k variant de n à $2n$

35. *Exemple d'utilisation de la transformation d'Abel*
On se propose d'étudier,selon θ la nature de la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$. C'est une série classique dont l'étude est à la fois importante et difficile. Pour cela on utilise la technique dite "transformation d'Abel" et qui est l'équivalent de l'intégration par parties pour les séries.

(a) La série est elle absolument convergente ?

(b) On pose $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, $v_k = e^{ik\theta}$ $u_k = \dfrac{1}{k}$. démontrer par récurrence l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k$$

(c) Calculer explicitement V_n, lorsque $e^{i\theta}$ n'est pas égal à 1 et montrer que la suite (V_n) et majorée par une constante C qui dépend de θ mais pas de n.

(d) Démontrer que u_nV_n tend vers 0 et que la série $\sum_k (u_k - u_{k+1})V_k$ est absolument convergente.

(e) Conclure que $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ est une série convergente si et seulement si $e^{i\theta}$ n'est pas égal à 1

Manipulations de tranches de Cauchy

Les tranches de Cauchy d'une série sont les sommes $\sum_m^n u - k$. Elles doivent tndrre vers 0 lorsque m et n tendent vers l'infini. Cette simple remarque sert parfois à établir la divergence.

(a) Soit $(a_n)_n$ une suite de réels strictement positifs telle que pour tout n, $a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$. Montrer que la série $\sum a_n$ diverge.

(b) *classique*. Etudier la série $u_n = \frac{(-1)^{[\ln n]}}{\sqrt{n}}$.

36. *Règle de Cauchy*

Soit u_n positive telle que $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to l$.

(a) Montrer :
si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
Si $l > 1$ $\sum u_n$ diverge grossièrement.
(règle de Cauchy)

(b) On pose $u_n = \begin{cases} \frac{2^p}{3^p} \text{ si } n = 2p \\ \frac{2^p}{3^{p+1}} \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$ Etudier $\sum u_n$ par la règle de Cauchy.
La règle de d'Alembert aurait elle permis de conclure ?

On rappelle qu'il existe une constante γ telle qu'on ait le développement $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ où H_n est la somme partielle de la série harmonique. Cette constante intervient dans de nombreux problèmes d'analyse. Les deux exercices suivants en sont une application .

37. *Utilisation de la constante d'Euler et de la série harmonique*
Calculer la somme de la série de terme général

$$u_k = \frac{1}{2k} - \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3}$$

38. *Changement d'ordre des termes d'une série semi-convergente.*

On considère la série :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ...$$

(a) Démontrer que la somme partielle S_{3n} de cette série est égale à $H_{4n} - \frac{1}{2}(H_n + H_{2n})$.

(b) En déduire la convergence de cette série et sa somme

(c) Rappeler la somme de la série harmonique alternée. Quel phénomène surprenant constate t'on ici ?

39. *difficile. Changement d'ordre des termes d'une série semi-convergente.(2)*

(a) Soit une suite (u_n) réelle. On pose $u_n^+ = \sup(u_n, 0)$ et $u_n^- = \sup(-u_n, 0)$. On suppose la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

Vérifier que les deux suites $P_n = \sum_0^n u_k^+$ et $N_n = \sum_0^n u_k^-$ tendent vers $+\infty$.

Que dire des suites $(P_{n+1} - P_n)$ et $(P_n - N_n)$?

(b) En déduire qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente (resp. convergente de somme a, a étant arbitraire ! !).

40. *Groupement de termes* 2 *à* 2.

(a) Soit $\sum u_n$ une série , on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$,

i. Exprimer les sommes partielles U_{2n-1} et U_{2n} de la série $\sum u_n$ en utilisant une somme partielle des v_n (et le terme u_{2n}).

ii. En déduire que si $\sum v_n$ converge et $u_n \to 0$ alors la série $\sum u_n$ converge

(b) Utiliser le résultat précédent pour redémontrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$.

(c) Etudier par cette même méthode la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

Comparaison série intégrale. Etude asymptotique

41. Montrer que la partie entière du nombre $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$ est égale à 2997. On pourra faire une comparaison série intégrale.

42. En utilisant que la fonction $f(x) = x \ln x$ est croissante sur $[1, +\infty[$ et une comparaison série intégrale, étudier la nature de la série de terme général

$$\frac{1}{2 \ln 2 + \ldots + n \ln n}$$

43. *Exemple de développement asymptotique d'une somme.*

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k$. L'objectif de l'exercice est de donner un développement généralisé de S_n.

(a) Donner un encadrement de S_n par des intégrales. En déduire que S_n est équivalent à $n \ln n$.

(b) On pose $u_n = \ln n - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln t dt$. Calculer u_n et en donner le développement à la précision $o(\dfrac{1}{n^2})$.

(c) En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$S_n = n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C + o(1)$$

44. *Un exemple d'étude de reste :*

(a) A l'aide d'une comparaison série intégrale, donner un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$

(b) Soit $(a_n)_n$ une suite telle que $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ $\alpha > 1$. Montrer que le reste d'ordre n de la série $\sum a_n$ vérifie $R_n = o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

(c) Soit $(a_n)_n$ une suite possédant un développement de la forme $a_n = \dfrac{a}{n^2} + \dfrac{b}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Montrer qu'il existe des constantes a', b' telles que $a_n = \dfrac{a'}{n(n-1)} + \dfrac{b'}{n^3} + o(\dfrac{1}{n^3})$

En déduire en utilisant la question précédente que le reste d'ordre n de la série $\sum a_n$ possède un développement de la forme : $R_n = \dfrac{c}{n} + \dfrac{d}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On trouvera explicitement les constantes c, d en fonction de a, b.

(d) Soit t_n la suite $t_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n - \gamma$.
Montrer que t_n est le reste d'ordre n de la série de terme général (a_n) où $a_n = t_{n-1} - t_n$.

En déduire un développement de $1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

45. *classique. difficile.* Séries $\sum f(n)$ avec f' intégrable.

Le résultat de cet exercice généralise la comparaison série intégrale au cas des fonctions qui ne sont pas décroissantes.

Soit $f \in C^1([a, +\infty[)$. On suppose $f' \in L^1([a, +\infty[)$. On pose $v_n = f(n)$

(a) Vérifier l'égalité
$$\int_n^{n+1} f(t)dt - v_n = \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)dt$$

(b) Montrer que $\sum v_n$ converge si et seulement si $\int_0^{\infty} f(t)dt$ converge.

(c) Etudier les séries de terme général
$$\frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}, \frac{\sin(\ln n)}{\sqrt{n}}$$

Suites doubles. Produit de Cauchy. Familles sommables

46. Calculer le produit de Cauchy de la série $\sum a^n$ avec elle même.
En déduire la somme de la série $\sum na^n$.

47. On donne $a \in]0, 2[$.

Montrer la convergence des deux séries $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{2^n - a}$ et $\sum_{k \geq 1} \dfrac{a^{k-1}}{2^k - 1}$.
En utilisant une faimlle sommable, montrer qu'elles ont la même somme.

48. Produit de cauchy de deux séries semi convergentes
On pose $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$. On appelle w_n le terme général du produit de Cauchy de ces deux séries.

(a) Etablir l'inégalité $\sqrt{x(n-x)} \leq \dfrac{n}{2}$ pour tout $x \in [0, n]$

(b) En déduire une minoration de $|w_n|$. La série $\sum w_n$ est elle convergente ?

49. Soit $\sum u_n$ une série positive convergente.
On pose
$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + ... + nu_n}{n(n+1)}$$
. Montrer que la série de terme général v_n est convergente en introduisant la suite double $w_{p,q} = \dfrac{pu_p}{q(q+1)}$ pour $p \leq q$ (et $u_{p,q} = 0$ sinon)

50. Etudier la sommabilité des familles :

(a) $\left(\dfrac{a^n b^m}{(n+m)!}\right)_{n,m}$ $(a, b$ complexes$)$. Calculer la somme.

(b) $\left(\dfrac{1}{n^a+m^b}\right)_{n>0,m>0}$ $(\,a, b > 0.)$

Indication : on comparera la somme sur n avec l'intégrale de la fonction $g(t) = \dfrac{1}{t^a+m^b}$ et faire un changement de varialbe pour " faire sortir m de l'intégrale").

51. On pose $u_{n,m} = \begin{cases} 0 \text{ si } n = m \\ \dfrac{1}{n^2-m^2} \text{ sinon} \end{cases}$.

   (a) Montrer que à n fixé, la série de terme général $u_{n,m}$ converge. Montrer que $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{n,m} = \dfrac{1}{2n^2}$ (on pourra revenir aux sommes partielles et faire une décomposition en éléments simple)

   (b) Montrer sans calcul que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{n,m}$ et $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n,m}$ sont non nulles et opposées.

   (c) la famille est elle sommable ?

   (d) reprendre cette dernière question en étudiant la suite $v_n = u_{n,n+1}$.

52. On note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. Pour z complexe de module strictement inférieur à 1, montrer que la famille $(z^{mn})_{m,n\geq 1}$ est sommable. En déduire l'égalité $\sum\limits_{1}^{\infty} d_n z^n = \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{z^n}{1-z^n}$

53. *classique. difficile.* Produit de convolution en arithmétique.
Soient $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. On définit $f * g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ en posant

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{\{(p,q),pq=n\}} f(p)g(q)$$

On note **1** la fonction constante égale à 1.

On dit que f est multiplicative si pour m, n premiers entre eux on a $f(mn) = f(m)f(n)$

   (a) Montrer que l'opérateur $*$ est associatif et commutatif et que si f, g sont multiplicatives il en est de même de $f * g$.(ces propriétés sont faciles à prouver, on peut les admettre dans un premier temps)

   (b) Démontrer que si la série $S_f(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{f(n)}{n^x}$ et la série $S_g(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{g(n)}{n^x}$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum \dfrac{f*g(n)}{n^x}$ converge absolument et qu'on a

$$S_{f*g}(x) = S_f(x)S_g(x)$$

   indication : on utilisera la famille $v_{p,q} = \dfrac{f(p)g(q)}{(pq)^x}$ *et on montrera qu'elle est sommable.*

   (c) Soit μ l'unique fonction multiplicative qui vérifie : $\mu(1) = 1, \mu(p) = -1$ pour p premier et $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré.

   (d) Montrer que si $\mathrm{Re}(z) > 1$ on a $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^z} = \dfrac{1}{\zeta(z)}$