Algèbre linéaire

Dans l'ensemble du chapitre, E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$

I Indépendance linéaire – Sommes directes

I.1 Différentes définitions équivalentes des familles libres

Définition (Cas des familles finies)

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs. On dit que cette famille est libre lorsqu'une des propriétés suivantes (équivalentes) est vérifiées :

i. $\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$

ii. L'application ϕ définie ci-dessous est injective :

$$\phi : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \end{array} \right.$$

iii. $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$ est de dimension n

Définition (Cas des familles infinies)

$(e_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si pour tout $J \subset I$ finie, $(e_j)_{j \in J}$ est libre.

Une base est une famille libre et génératrice. A propos des bases on rappelle :

Théorème

— Une famille libre maximale est une base.
— Une famille génératrice minimale est une base.
— (base incomplète)
Dans un espace de dimension finie, pour toute famille libre L et toute famille génératrice G il existe une base B obtenue en complétant L avec des vecteurs de G.

En ce qui concerne l'existence des bases en dimension quelconque, elle n'est pas assurée par le programme, et repose sur le théorème de Zorn. On ne peut donc pas à priori en utiliser en toute généralité (par exemple, l'existence d'une base du $\mathbb{Q}$ espace vectoriel $\mathbb{R}$ ou de l'espace des fonctions continues sur un intervalle). Cependant dans les espaces usuels simples, il sera souvent possible d'en exhiber , comme par exemple dans $\mathbb{K}[X]$.

I.2 Techniques d'étude de l'indépendance (rappels)

I.3 Rappels de résultats théoriques élémentaires

(i) Une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si :

c'est faux pour plus que 2 vecteurs.

(ii) Une famille de n vecteurs est liée si et seulement si :

(iii) Une sous famille d'une famille libre est libre.

(iii) Une famille libre de E contient au maximum $\dim E$ vecteurs.

I.3.1 Dans les espaces de fonctions

Soit $(f_1, ... f_p)$ une famille de fonctions. Pour montrer que cette famille est libre, on considère $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des scalaires **indépendants de** $x$tels que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p = 0$. On peut applique à la $g(x) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_p f_p(x)$ qui est **identiquement nulle** tous les arguments de fonctions usuelles (évaluation, limite, dérivation, intégrales...).

Voici deux exemples :

(i) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Alors $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.
(ii) La famille des $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ avec $f_t : x \longmapsto |x - t|$ est libre.

I.3.2 Arguments en dimension finie

Dans les espaces de dimension finie, on dispose en plus de **l'argument matriciel** :

Proposition

Le rang d'une famille de vecteurs est égal à celui de sa matrice dans une base B

En particulier :
Une famille qui est échelonnée dans une base est libre.
Une famille de polynômes échelonnée en degrés est libre.

Voici un exemple techniquement délicat d'utilisation de la méthode matricielle :

Exemple. Soit $(v_1, ..., v_n)$ n vecteurs d'un espace vectoriel E et $a_1, ..., a_n$ n scalaires. Pour tout i, on pose $w_i = v_1 + \cdots + v_n + a_i v_i$. À quelles conditions $(w_1, ..., w_n)$ est libres ?

I.3.3 Autres arguments

Orthogonalité :
On peut utiliser directement et sans justification le théorèmem suivant :

Proposition

Toute famille de vecteurs qui sont deux à deux orthogonaux est libre.

Indépendance des fonctions trigonométriques
Exemple. On note $c_n : x \longmapsto \cos(nx)$ et $s_n : x \longmapsto \sin(nx)$. La famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (s_n)_{n\mathbb{N}^*}$ est libre.

La preuve de ce résultat (qui est en fait un résultat d'orthogonalité) doit être connue.

Indépendance des polynômes interpolateurs de Lagrange.
Exemple. On note $c_n : x \longmapsto \cos(nx)$ et $s_n : x \longmapsto \sin(nx)$. La famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (s_n)_{n\mathbb{N}^*}$ est libre.

La preuve de ce résultat (qui est en fait un résultat d'orthogonalité) doit être connue.

Indépendance des vecteurs propres

Définition (Rappel)

Soit f un endomorphisme de E. Un vecteur $x \neq 0$ est dit vecteur propre de f lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

Proposition

Soit f une application linéaire. Toute famille de vecteurs propres de f associés à différentes valeurs propres est libre.

Exemple. On se place sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Les fonctions $e_\lambda : x \longmapsto e^{\lambda x}$ forment une famille libre de E.

Effet du corps de base
Si $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ et si E est un $\mathbb{K}'$-espace vectoriel, alors E est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de E. Si $(e_1, ..., e_p)$ est $\mathbb{K}'$-libre, alors elle est aussi $\mathbb{K}$-libre.

Attention, une famille de vecteurs de $\mathbb{C}^n$ qui est libre sur le corps de base $\mathbb{R}$ n'est pas forcément libre sur $\mathbb{C}$. par exemple, $(1, i)$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais bien sur pas dans le $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

I.4 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $A \cap B = \{0\}$

ii. $\forall z \in A+B, \exists! (x,y) \in A \times B, z = x+y$.

iii. L'application suivante est injective :

$$\left| \begin{array}{lcl} A \times B & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$$

iv. Si F_A est une famille libre de A et F_B est une famille libre de B, alors la concaténation de F_A et de F_B est libre.

v. (en dimension finie) $\dim(A+B) = \dim A + \dim B$

Lorsque l'une d'elle est vérifiée, on dit que A et B sont en somme directe, et on note $A \oplus B$ leur somme.

En pratique : les caractérisations i. et v. sont les plus souvent utilisées.

I.5 Supplémentaires

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont supplémentaires si et seulement si $F \oplus G = E$.

L'existence de supplémentaires est équivalente au théorème de la base incomplète. Ainsi :

Proposition

Soit F un sous-espace de E. Si E est de dimension finie, F possède toujours un supplémentaire. Toutefois, il n'y a (presque) jamais unicité d'un tel supplémentaire.

A cause de la remarque précédente noter que :

Vocabulaire. On dit :
- **Un** supplémentaire
- **Le** supplémentaire orthogonal

LD'ailleurs le supplémentaire orthogonal n'est défini que dans le cas d'un espace euclidien, pas dans tous les espaces vectoriels.

Visualisation Lorsqu'on travaille avec des sommes directes, il faut toujours avoir à l'esprit le schéma suivant :

Stratégie pour montrer que deux sous espaces sont supplémentaires en dimension finie :

(i) Montrer $F \cap G = \{0\}$
(ii) Utiliser l'argument de dimension (on peut aussi montrer $F+G=E$ mais c'est souvent plus difficile).

Stratégie pour trouver un supplémentaires d'un sev F en dimension finie :

Souvent le plus simple est de compléter une base B_F de F par des vecteurs $(u_1, \ldots, u_r)$ en une base de E. L'espace $G = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)$ est un supplémentaire.

Exemples :

Exemple. 1- Un exemple de supplémentaire des matrices de trace nulle.

2- l'image et le noyau d'un endomorphismes sont ils supplémentaires ?

3- Montrer que si $x \notin F$, il existe un supplémentaire de F qui contient x.

4-Quels sont les supplémentaires des espaces de dimension $n-1$ dans un espace de dimension n.

Remarque.
La proposition suivante est **fausse** :
"Soit F un sous-espace vectoriel de E, et soit G tel que $E = F \oplus G$. Si $x \notin F$, alors $x \in G$."

Somme de n sous-espaces vectoriels

Définition

Soient $E_1, ..., E_n$ n sous-espaces d'un espace E.
On note $E_1 + \cdots + E_n$ le sous espace satisfaisant des trois définitions équivalentes suivantes (une seule suffit, donc) :

i. $\mathrm{Vect}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$ (c'est le plus petit SEV contenant tous les E_i)
ii. $\{x_1 + \cdots + x_n, \forall i, x_i \in E_i\}$
iii. L'image de l'application linéaire :

$$\left| \begin{array}{lll} E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

Proposition

En dimension finie, on a toujours

$$\dim(E_1 + \cdots + E_n) \leqslant \dim E_1 + \cdots + \dim E_n$$

Proposition (caractérisation des sommes directes)

On dit que $E_1, ..., E_n$ est une somme directe lorsque l'une au choix des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

i. Unicité de la décomposition :
Pour tout $x \in E_1 + \cdots + E_n$, il existe un unique n-uplet $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_n$. (c'est la vraie définition)

ii. Unicité de la décomposition du vecteur nul :
Si $0 = x_1 + \cdots + x_n$, avec $x_i \in E_i$, alors $x_i = 0$ pour tout i.

iii. Pour tout i, E_{i+1} est en somme directe avec $E_1 + \cdots + E_i$:

$$E_{i+1} \cap (E_1 + \cdots + E_i) = \{0\}$$

iv. Caractérisation par les dimensions : $\dim(E_1 + \cdots + E_n) \leqslant \dim E_1 + \cdots + \dim E_n$.

v. Caractérisation par les bases : Si pour tout i, F_i est une famille libre (base) de E_i, alors $F = \sqcup F_i$ est libre (une base de la somme).

Dans le cas ou elle est directe, la somme est notée $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Proposition

Les sommes directes sont **commutatives.** Si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$:

$$E_1 + \cdots + E_n = E_{\sigma(1)} + \cdots + E_{\sigma(n)}$$

Plus important : elles sont **associatives** :

si $E_1, \ldots E_p$ d'une part et $E_{p+1}, \ldots, E_q$ d'autre part sont en somme directe, et si les espaces $F = \bigoplus_1^p E_k$ et $G = \bigoplus_{k+1}^q E_k$ sont en somme directe,
alors $E_1, \ldots E_q$ sont en somme directe et $\bigoplus_1^q E_k = F \bigoplus G$

Exemple : Démonstration de la formule de Grassman. (Noter que cette formule ne vaut que pour deux SEV. Il n'existe pas de formule analogue pour p SEV lorsque $p \geq 3$.

Définition (projecteurs associés à une somme directe)

On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. On note p_i le projecteur d'image E_i et de noyau $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. La famille $(p_1, ..., p_n)$ s'appelle famille des projecteurs associés à la somme directe.

Proposition

$$p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}$$

$$p_i \circ p_j = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

Réciproquement, si $p_1, ..., p_n$ sont des projecteurs tels que $p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}$ et $p_i \circ p_j = 0$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Im}\, p_i$.

II Applications linéaires

II.1 Les notations

$\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F c'est un **espace vectoriel**

$\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans E (les **endomorphismes** de E c'est une **algèbre**.

II.2 Version géométrique du théorème du rang

Le théorème du rang repose sur le lemme suivant :

Lemme

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker f$. Alors $f_{|G}$ est un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} f$.

Démonstration à connaître

La plus importante application est :

II.3 Théorème (ou formule) du rang

Théorème (Théorème du rang)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors f est de rang fini, et $\operatorname{rg} f = \dim F - \dim \ker f$.

Noter les points suivants :
- On suppose seulement que E est de dimension finie. Pas d'hypothèse sur F.

- Ce théorème ne renseigne aucunement sur la géométrie du noyau et de l'image de f, c'est seulement un renseignement sur leurs dimensions. (même si $E = F$).

Exemple : A quelle condition sur E existe t'il un endomorphisme f tel que $\ker f = \operatorname{Im} f$?

-Dans le cas des endomorphismes, en revanche on a une caractérisation simple des cas où l'image et le noyau sont supplémentaires.

II.4 Propriété du rang

Proposition

i. $\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$
ii. $\operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \operatorname{rg} f$
iii. $\operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \operatorname{rg} g$
iv. Si f est bijective, $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$

Il faut savoir manipuler le théorème de rang pour des endomorphismes composés. Par exemple

$$rg(g \circ f) = rgf - \dim \operatorname{Im} f \cap \ker g$$

Exemple :
1) On suppose que f est un endomorphisme d'un espace de dimension 10 tel que $f^2 = 0$. Montrer que le rang de f est au maximum égal à 5.
2) On suppose cette fois ci que f est un endomorphisme d'un espace de dimension 10 tel que $f^3 = 0$. Montrer que le rang de f est au maximum égal à 6.

II.4.1 Exemples d'utilisations géométriques du théorème du rang

a) Montrer que pour tout polynôme Q il existe un unique polynôme P tel que $P(X+1) - P(X) = Q(X)$ et $P(0) = 0$.

b)Interpolation dérivable : Soit f une fonction de classe C^1 et $x_0, \ldots, x_n$, $n+1$ points. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $P(x_i) = f(x_i)$ et $P'(x_i) = f'(x_i)$ pour tout i. Quel condition de degré rend ce polynôme unique ?

II.5 Construction d'applications linéaires

II.5.1 A partir d'une base

Le résultat clé est le suivant :

Proposition

Si $B = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de F alors il existe une unique application linéaire $f \in L(E,F)$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout i.

La conséquence est qu'on ne peut pas construire les applications linéaires n'importe comment :
Exemple :
1) Si $E = F \oplus G$
1) existe t'il une application linéaire telle que $f(x) = x$ sur F et $f(x) = 0$ sur G ?
2) existe t'il une application linéaire telle que $f(x) = x$ sur F et $f(x) = 0$ si $x \notin F$?

II.5.2 Avec des sommes directes.

Proposition

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, étant donné pour tout i une application linéaire $u_i : E_i \to F$, il existe une et une seule application linéaire $f \in L(E,F)$ telle que $f_{|E_i} = u_i$ pour tout i.

On dit qu'une application linéaire est déterminée par ses restrictions à une somme directe. La conséquence est que les décompositions en somme directe sont un bon cadre pour construire des applications linéaires. En voici un exemple (valable en dimension finie) :

Montrer que si $f : E \to F$ est une application linéaire injective (resp surjective), il existe une application linéaire g telle que $g \circ f = Id_E$ (resp $f \circ g = Id_F$).

II.6 Endomorphismes remarquables

II.6.1 Homothéties

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe λ tel que $f = \lambda \mathrm{id}$.

Lemme

Si f vérifie $(x, f(x))$ est liée pour tout x, alors f est une homothétie.

Démonstration. A connaitre !

II.6.2 Injections, surjection, bijection

Rappel de vocabulaire : une bijection linéaire entre espaces vectoriel est un **isomorphisme**. Si en plus $E = F$ c'est un **automorphisme**.

Si E est de dimension finie et $f \in L(E)$ alors f est bijective si et seulement si (au choix)

(i) Il existe une bijection réciproque
(ii) il existe une réciproque à gauche
(iii) il existe une réciproque à droite
(iv) f est injective
(v) f est surjective
(vi) $\det f \neq 0$.

Attention à ne pas oublier **l'hypothèse de dimension** ! !

Ceci ne marche que pour les **endomorphismes** (ou lorsque $\dim E = \dim F$) ! !

Les isomorphismes conservent toutes les choses intéssantes (l'image d'une base (resp une famille libre) est une base (resp une famille libre). Ils conservent la dimension des SEV, le rang .
De plus ce sont les seuls éléments **simplifiables** pour la composition :

Proposition

si f est bijective, alors $fg = 0 \Rightarrow g = 0$ et $gf = 0 \Rightarrow g = 0$.

Exemple : quels sont les projecteurs bijectifs ?

II.6.3 Projecteurs

Proposition

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
- $p \circ p = p$
- $\operatorname{Im} p \oplus \ker p = E$ et $p(x) = x$ pour $x \in \operatorname{Im} p$
- il existe B une base telle que :

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } r = \operatorname{rg} p$$

Proposition

Si p est un projecteur :
- $\operatorname{Tr} p = \operatorname{rg} p$
- $ker(\mathrm{id} - p) = \operatorname{Im} p$
- $\operatorname{Im}(\mathrm{id} - p) = \ker p$

Remarque. Un projecteur est caractérisé par son image <u>et</u> son noyau. Si on ne connait que l'image on ne connait pas le projecteur (il y a une infinité de projecteurs ayant une image donnée).

II.6.4 Endomorphismes nilpotents

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est nilpotent lorsqu'il existe $k \geqslant 0$ tel que $f^k = 0$.

L'entier k minimal vérifiant cette propriété s'appelle l'indice de nilpotence de f.

Proposition

Soit f nilpotent, et si E est de dimension finie n. Alors $f^n = 0$.

Autrement dit, l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension.

III Rappels sur les matrices

III.1 Matrices remarquables

III.1.1 La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Elle est formée des $E_{ij} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{(k,l)}$. Lorsque le produit existe (c'est à dire ici quand les matrices sont carrées), on a la formule suivante :

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

III.1.2 Matrices lignes et colonnes

Soit $L = (l_1, ..., l_n) \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$ une matrice ligne et $C = (c_1, ..., c_n)^T \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne.
Le produit $LC \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{K}) \sim \mathbb{K}$. et son unique terme vaut $\sum l_i c_i$.
On remarque que si l'on munit $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, alors pour $X = (x_1, ..., x_n)^T$ et $Y = (y_1, ..., y_n)^T$, $\langle X|Y\rangle = X^T Y = Y\, X^T$. Cette expression du produit scalaire sera souvent utile.

A l'inverse le produit CL est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $CL = (c_i l_j)_{(i,j)}$.

Si $C \neq 0$ et $L \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(CL) = 1$.
Exercice classique : démontrer que toute matrice carrée de rang un s'écrit comme le produit d'une colonne et d'une ligne.

III.1.3 Matrices carrées remarquables

On note :
- $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales
- $\mathcal{T}_n^+$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures
- $\mathcal{T}_n^-$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

$\mathcal{D}_n$ est une sous-algèbre commutative de dimension n. Ses éléments inversibles sont les matrices dont les éléments diagonaux sont tous non nuls.

$\mathcal{T}_n^+$ et $\mathcal{T}_n^-$ sont des sous-algèbres de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Leurs élements inversibles sont les matrices dont les éléments diagonaux sont tous non nuls. De plus l'inverse d'une matrice triangulaire est aussi triangulaire et on connait les coefficients diagonaux.

On note :
- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques
- $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymetriques.

III.2 Matrices de blocs

III.2.1 Décomposition par blocs

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A chaque "découpage" de n et p de la forme $n = n_1 + \cdots + n_r$ et $p = p_1 + \cdots + p_s$ on associe un "découpage" de M dit décomposition par blocs : $M = (M_{i,j})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s}$ dans lequel $M_{i,j}$ est le bloc de taille (n_i, p_j) correspondants aux indices du i-ème "morceau" de n et du j-ème morceau de p (exercice : écrire précisément quels sont les indices $m_{k,l}$ qui interviennent dans le bloc $M_{i,j}$).
Ce découpage sera justifié géométriquement plus tard en terme d'applications linéaires. L'intérêt majeur de ce découpage est le suivant :

Proposition

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont découpées en blocs, et si les tailles des blocs sont compatibles (c'est à dire que p est découpé de la même façon dans les deux matrices) alors le produit MN peut se calculer en faisant les produits par blocs.

III.2.2 Matrices blocs diagonales et blocs triangulaires

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. M est dite bloc-diagonale de type $(n_1, \ldots, n_r)$ lorsque :

- $n_1 + \cdots + n_r = n$
- il existe $D_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}), ..., D_r \in \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{K})$ tels que (les termes non écrits sont nuls) :

$$M = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_r \end{pmatrix}$$

Avec les mêmes notations, on dit que N est triangulaire supérieur par blocs si elle s'écrit (les termes sous la diagonale de blocs sont nuls) :

$$N = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & (*) & \\ & & \ddots & \\ & & & D_r \end{pmatrix}$$

Les règles du produit matriciel par blocs montrent que :

Proposition

l'ensemble des matrices diagonales (resp. triangulaires) par blocs de type $(n_1, \ldots, n_r)$ est une sous algèbre. En particulier il est **stable par produit.**

Exercice : quelle est sa dimension ?

III.2.3 Matrices inversibles/simplifiables

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. M est simplifiable à gauche ou à droite si et seulement si elle est inversible.

Démonstration.

Remarque : Ce résultat n'est pas vrai pour les matrices rectangulaires : **une matrice inversible est automatiquement carrée.**

Proposition

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un **groupe** pour la multiplication noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
En revanche, la somme de deux matrices inversibles n'est pas en général inversible.

Une propriété remarquable est que si une matrice carrée est d'une "certaine forme", alors il en est automatiquement de même de son inverse en vertu du lemme général suivant :

Lemme

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre, et soit B une sous algèbre de A de dimension finie. Soit $x_0 \in B$ inversible dans A. Alors $x_0^{-1} \in B$.

En particulier dans le cas d'une matrice triangulaire par blocs ou diagonale par blocs on a :

Dans le cas des matrices diagonales par blocs , M est inversible si et seulement si tous les D_i sont inversibles, et dans ce cas :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} D_1^{-1} & & & \\ & D_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_r^{-1} \end{pmatrix}$$

De plus, $\det M = \prod \det D_i$

Dans le cas des matrices diagonales par blocs , M est inversible si et seulement si tous les D_i sont inversibles, et dans ce cas :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} D_1^{-1} & & & \\ & D_2^{-1} & (*) & \\ & & \ddots & \\ & & & D_r^{-1} \end{pmatrix}$$

ce qui généralise le résultat connu pour les matrices diagonales et triangulaires.

III.2.4 Transvections

Soit $n \in \mathbb{N}$. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle une matrice de transvection s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ tels que $M = I_n + \lambda E_{ij}$. On la note généralement $T_{ij}(\lambda)$.

La multiplication d'un matrice M carrée ou rectangulaire par $T_{ij}(\lambda)$ à gauche réalise l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et à droite l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

Proposition

$\{T_{ij}(\lambda),\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ est une famille génératrice du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}), \cdot$: autrement dit, toute matrice de déterminant 1 est un produit de matrices de transvection.

Cette proposition indique que le procédé du pivot de Gauss (sur les lignes d'une matrices inversibles) permet de calculer l'inverse d'une matrice, ou encore de résoudre un système linéaire.

Exercice de cours :
montrer qu'une matrice M est une matrice de transvection si et seulement si $\mathrm{rg}(M - I) = n - 1$ et $\mathrm{Im}(M - I) \subset \ker(M - I)$

III.2.5 Matrices scalaires

Soit $n \in \mathbb{N}$. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle une matrice scalaire lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.
On a l'importante caractérisation suivante :

Proposition

M est scalaire si et seulement si elle commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il faut savoir redémontrer ce résultat.

III.3 Représentations des applications linéaires.

Commençons par rappeler les principales définitions :

III.3.1 Matrice d'un vecteur

Soit E uun espace de dimension finie n et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On note pour tout vectuer x $\mathrm{Mat}_B(x)$ la matrice **colonne** dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base B.

III.3.2 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies n et p. On note $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $C = (f_1, ..., f_p)$ une base de F. Soit $g \in \mathcal{L}(E, F)$. On note :

$$\mathrm{Mat}_{B,C}(g) \overset{\mathrm{def}}{=} (f_i^*(g(e_j)))_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$$

où $f_i^*(y)$ désigne la composante du vecteur y sur le vecteur f_i : $y = \sum_{i=1}^{p} f_i^*(y) f_i$.

Autrement dit, la $i$ème colonne de $\mathrm{Mat}_{B,C}(g)$ est égale à $\mathrm{Mat}_C f(e_i)$.

III.3.3 Matrice de changement de base.

Si $B' = (e'_1, ..., e'_n)$ est également une base de E, alors on note :

$$P_B^{B'} = P_{B\to B'} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Mat}_B(e'_1, ..., e'_n) = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id})$$

Proposition

En conservant les notations précédentes :

— L'application ϕ définie ci-dessous est un isomorphisme d'espaces-vectoriels :

$$\phi : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ g & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{B,C}(g) \end{array} \right.$$

— L'application ψ définie ci-dessous est un isomorphisme d'algèbre :

$$\psi : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \\ g & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{B}(g) \end{array} \right.$$

— Supposons que $f \in \mathcal{L}(F_B, F_C)$ et que $g \in \mathcal{L}(F_C, F_D)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{BD}(f) = \mathrm{Mat}_{CD}(g)\mathrm{Mat}_{BC}(f)$$

Les matrices de changement de base se multiplient et s'inversent :

$$P_{B\to B'} P_{B'\to B"} = P_{B\to B"}$$
$$P_{B\to B'}^{-1} = P_{B'\to B}$$

III.4 Changements de base

Voici un rappel des différentes formules de changement de base. Pour simplifier, on note $P = P_{B\to B'}$ et $Q = P_{C\to C'}$

Proposition (pour les vecteurs)

Soit $x \in E$. Alors :
$$\mathrm{Mat}_B(x) = P\mathrm{Mat}_{B'}(x)$$

Proposition (pour les applications linéaires)

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $M = \mathrm{Mat}_{BC}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{B'C'}(f)$. Alors :
$$M' = Q^{-1}MP$$

Proposition (pour les endomorphismes)

Soient $M = \mathrm{Mat}_B(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{B'}(f)$. Alors :
$$M' = P^{-1}MP$$

III.4.1 Différence entre le cas des applications linéaires et celui des endomorphismes

Il est important de bien comprendre la différence entre les applications ϕ et ψ, ou d'une manière équivalente entre le changement de base pour les applications linéaires (bases différentes au départ et à l'arrivée)et les endomorphismes (bases identiques au départ et à l'arrivée).

dans le premier cas, le changement de base n'est compatibles qu'avec les opérations linéaires (sommes et produit par un scalaire). Dans le second cas il est aussi compatible avec la composition ou le produit matriciel.
L'exemple suivant illustre l'efficacité de l'isomorphisme d'algèbres ψ : c'est à dire du passage du langage des matrices carrées à celui des endomorphismes.

III.4.2 Matrices de permutations

Soit E de dimension n, et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. A $\sigma \in \Sigma_n$, on associe $f_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ en posant $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. on note M_σ la matrice de terme général $\delta_{i,\sigma(j)}$. Une telle matrice s'appelle une matrice de permutation. Ce sont les matrices ayant exactement un 1 par ligne et par colonne, les autres termes étant nuls.

Proposition

Les matrices de permutations sont toutes inversibles.
L'application $\sigma \mapsto M_\sigma$ est un morphisme de groupe. en particulier $M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'}$ et $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}} = M_\sigma^T$

III.5 A propos des matrices équivalentes

Définition

Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. On dit que M est N sont équivalentes lorsqu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $N = Q^{-1}MP$.

Ainsi deux matrices sont équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par **deux** changements de base : un au départ et un à l'arrivée. Des matrices équivalentes peuvent représenter la même application linéaires dans des systèmes de bases (départ, arrivée) différents.

La notion de matrice équivalente s'applique aux matrices carrées ou aux matrices rectangulaires.

Proposition

a)Il s'agit d'une relation d'équivalence.

b) Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

c) Toute matrice de rang r de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc équivalente à J_r :
$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque. Il est en intéressant d'utiliser des matrices équivalentes dès que :

— Le problème ne dépend que du rang
— Le problème est invariant par multiplication de matrices inversibles
— Le problème est invariant par transformations élémentaires.

Exemple. Montrer que toute matrice de rang r est somme de r matrices de rang 1.

Exemple. Soient A et B deux matrices carrées. Montrer que $f : x \longmapsto \det(Ax + B)$ est un polynôme en x et majorer son degré.

III.6 Matrices semblables

Si la notion de matrice équivalente ne concerne que le rang, celle de matrices semblables, beaucoup plus contraignante donne des renseignements géométriques beaucoup plus profonds. C'est elle que nous étudions en détail cette année. Il est essentiel de ne pas confondre les deux notions.

III.6.1 Définition

Définition

Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que M et N sont semblables lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}MP = N$.

Proposition

Il s'agit d'une relation d'équivalence nommée similitude.

M et N sont semblables si et seulement si elles représentent un même **endomorphisme** f d'un espace de dimension n dans des bases différentes.

Noter que seules les matrices carrées peuvent être semblables.

III.6.2 Invariants de similitude

Définition

Une fonction g définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $g(M) = g(N)$ pour tout M et N semblables est appelée invariant de similitude.

Les exemples suivants sont très importants et doivent être connus :

Proposition

Deux matrices semblables ont même trace, même rang et même déterminant.

(La trace, le rang, le déterminant sont des invariants de similitudes.)

III.6.3 A propos de la trace

Voici un résumé des propriétés utiles de la trace.

Proposition

— Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc de dimension n^2-1.
— $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ dès lors que AB est carrée.
— Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donné par $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$

III.6.4 Manipulation de matrices semblables.

Pour démontrer que deux matrices ne sont pas semblables, on peut montrer que l'un des invariant de similitude précédents n'est pas conservé. (ce n'est pas une CNS !!).

Exemple :

Pour montrer que deux matrices sont semblables on a deux angles d'attaque : soit trouver une matrice P de passage inversible. Soit interpréter les deux matrices en termes d'endomorphismes. La seconde est souvent plus fructueuse, sauf dans les manipulations algébriques .

Exemple. Montrer que si M et N sont semblables il en est de même de leur carrés. (ceci n'est pas vrai avec des matrices équivalentes, en donner un contrexemple).

Exemple. Montrer que les deux matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix} \text{et} N = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables si et seulement si les a_i sont tous non nuls.

IV Formes linéaires.

IV.1 Définitions

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On pose $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On l'appelle le dual de E. Les éléments de E^* sont des formes linéaires.

Proposition

Si $\dim E < +\infty$, $\dim E^* = \dim E$.

IV.2 Formes linéaires de référence

IV.2.1 Coordonnées dans une base (dimension finie)

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. L'application qui à $x \in E$ associe sa coordonnée selon e_i est notée e_i^*.

Proposition

$(e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^*.

Une conséquence est que, **en dimension finie**, toutes les formes linéaires sont des combinaisons linéaires des coordonnées :

Proposition

Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont les fonctions

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum a_i x_i$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires arbitraires.

Ceci veut dire que si l'on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans une base de E, la matrice de linéaire f dans les bases B de E et 1 de $\mathbb{K}$ est la ligne $(a_1, \dots, a_n)$.

IV.2.2 Les formes linéaires usuelles en analyse

En analyse, la plupart des opérations sont linéaires (limites, dérivation, évalution, intégration) si elles sont à valeurs <u>scalaires</u> ce sont donc des éléments de E^*. Par exemple :

L'application qui a une série convergente associe sa somme est une forme linéaire :

$$\left| \begin{array}{lcl} \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_n) & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array} \right.$$

L'application évaluation en 1 de la dérivée d'un polynôme est une forme linéaire :

$$\left| \begin{array}{lcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P'(1) \end{array} \right.$$

IV.2.3 Formes linéaires dans le cas euclidien

Nous verrons plus tard le théorème suivant :

Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. On munit E d'un produit scalaire.
Toute forme linéaire sur E s'écrit de manière unique sous la forme $f = \langle a | \cdot \rangle$ avec $a \in E$.

L'application $a \in E \longmapsto \langle a | \cdot \rangle \in E^*$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels appelé isomorphisme canonique.

IV.3 Hyperplans

Définition

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de E. On dit que $\mathcal{H}$ est un hyperplan lorsqu'il existe $f \in E^*$ tel que $f \neq 0$ et $\ker f = \mathcal{H}$.

Le théorème qui suit est celui qui caractérise le mieux les hyperplans :

Théorème

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de E. Il est équivalent de dire :

- $\mathcal{H}$ est un hyperplan
- il existe une droite D telle que $\mathcal{H} \oplus D = E$
- pour tout $x_0 \notin \mathcal{H}$, $D = \mathrm{Vect}(x_0)$ est un supplémentaire de $\mathcal{H}$
- (en dimension finie) $\dim \mathcal{H} = \dim E - 1$

IV.3.1 Equation des hyperplans

Proposition

Soient f_1 et f_2 deux formes linéaires non nulles. Alors f_1 et f_2 sont colinéaires si et seulement si elles ont le même noyau.
Pour tout hyperplan H, il existe f, **unique à multiplication par une constante près**, telle que l'hyperplan H ait pour équation $f(x) = 0$.

IV.3.2 Intersection d'hyperplans

Proposition

Soient $H_1, ..., H_p$ des hyperplans en dimension n. Alors :

$$\dim \bigcap_{i=1}^{p} H_i \geqslant n-p$$

Proposition

Soient $f_1, ..., f_p$ des formes linéaires en dimension n. Alors :

$$\dim \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i = n-p \quad \Longleftrightarrow \quad (f_1, ..., f_p) \text{ est libre}$$

Plus généralement,

$$\dim \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i = n - rg(f_1, \dots, f_p)$$

En particulier la famille $f_1, \dots, f_n$ est une base de E^* si et seulement si $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i = \{0\}$

Réciproquement, tout espace vectoriel est une intersection d'hyperplans.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension q ($\dim E = n$). Alors il existe $p = n-q$ hyperplans H_i tels que :

$$F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$$

IV.4 Conséquence pour les systèmes linéaires homogènes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. On s'intéresse au système $AX = 0$, $X =^t (x_1 \cdots x_n)$. On note L_i les lignes de A.

Proposition

L'espace vectoriel des solutions est de dimension $p-r$.

Les n formes linéaires $f_i : X \longmapsto L_i X$ forment un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^p)^*$ de dimension r. On peut choisir r applications indépendantes parmi $f_1, ..., f_n$. Quitte à renuméroter, on suppose qu'il s'agit des r premières. Ainsi le système équivaut à $L_i X = 0$ pour $i \in [\![1, r]\!]$.

On en déduit alors la stratégie suivante pour résoudre un système **homogène :**

i. Calculer son rang (sur les lignes ou les colonnes de la matrice)
ii. Repérer r équations indépendantes : les autres équations sont redondantes.
iii. Trouver $p-r$ vecteurs indépendants qui sont solution du système formé par ces équations. L'ensemble des solutions est alors le sous espace vectoriel engengré par ces $p-r$ vecteurs

Remarques :
On rappelle le système est de Cramer lorsqu'il est carré et inversible. Dans ce cas, la seule solution est la solution triviale $X = 0$ il n'y a rien à faire.

Cette méthode ne s'appique que pour les systèmes homogènes.Lorsque le système possède un second membre la situation est plus délicate. Nous ne la rencontrerons quasiment jamais.

V Rappels et compléments sur les déterminants

V.1 Théorèmes et définitions

Rappelons :

Définition

Soit E de dimension n. Une application $f : E^n \to \mathbb{K}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ (le même n), est dite n-linéaire et alternée (encore le même n !) si :
- elle est linéaire en chacune de ses variables
- si $\exists i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$

On montre alors facilement que dans tous les cas on a

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots x_n)$$

Théorème

Soit E de dimension n. Alors l'espace des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1.

On illustre pour $n = 2$:

A partir de ce théorème, on peut donner les définitions suivantes :

Déterminant de n vecteurs dans une base :
Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. il existe donc une unique forme n-linéaire alternée f telle que $f(e_1, ..., e_n) = 1$. On appelle déterminant dans la base B cette application f et on la note $\det_B$.

Déterminant d'une matrice carrée :
Soit maintenant $M = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, ..., C_n$. On définit : $\det M = \det_B(C_1, ..., C_n)$. La base B étant la base canonique.

V.2 Propriétés fondamentales

Rappelons sans preuve quelques propriétés du déterminants valables pour des matrices carrée A, B, M :

- $\det M = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} m_{k,\sigma(k)}$
- C'est une fonction polynômiale des coefficients $m_{i,j}$
- le déterminant eest homogène de degré n : $\det(\lambda M) = \lambda^n \det M$
- $\det({}^tM) = \det(M)$
- $\det(AB) = \det(BA)$
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$
- $\det(P^{-1}AP) = \det A$ pour toute matrice inversible P.
- $\operatorname{rg} M = \max\{r,\ \exists i_1 < \cdots < i_r,\ \exists j_1 < \cdots < j_r,\ \det(m_{i_k,j_l})_{(k,l)\in[\![1,r]\!]^2} \neq 0\}$
- Un déterminant se dérive par colonne ou par ligne.

V.3 Formule de la comatrice.

Proposition

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$${}^t\mathrm{Com}(A) \cdot A = A \cdot {}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A) I_n$$

V.3.1 Applications de cette formule

Matrices à coefficients entiers
Une matrice à coefficients entiers est inversible dans l'ensemble $M_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si sont déterminant vaut ± 1.

Formules de Cramer On rappelle les formules suivantes dites, de Cramer, qui donnent une expression théorique de la solution d'un système inversible. Ces formules sont inutiles dans la pratique des calculs

Inverse d'une matrice (2,2)
On peut s on veut, connaître la formule suivante :

V.4 Déterminants remarquables

Les trois déterminants ci dessous peuvent être utilisés sans aucune justification.

i. Matrices diagonales et triangulaires : c'est le produit des coefficients diagonaux.

ii. Matrices diagonales et triangulaires par blocs :

   C'est le produit des déterminants des blocs diagonaux (il va de soit que ce résultat est vrai seulement sous réserve que les blocs diagonaux soient carrés)

iii. Le déterminant de Vandermonde.

$$\det\left(\lambda_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)$$

V.5 Méthodes de calcul. Exemples.

Les calculs de déterminant reposent majoritairement sur les techniques suivantes qu'il est nécessaire de bien savoir manipuler :

i. Développement selon une ligne ou une colonne.
Cette technique est surtout utile quand il y a **beaucoup de terme nuls** dans une rangée.

ii. Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.
Dans le but souvent de **faire apparaître des termes nuls** et d'appliquer la méthode précédente

iii. Utilisation de la n linéarité comme fonctions des lignes ou des colonnes. Utilisation de l'unicité du déterminant.
Cette technique sera surtout efficace dans des situations théoriques.

iv. Utilisation du caractère polynômial du déterminant
Cette technique est extrêmement efficace lorsqu'elle s'applique.

v. Dérivation d'un déterminant.
Plus exceptionnel

Exemples divers illustrant ces techniques.

i. Déterminants tridiagonaux.

ii. Déterminants d'entiers consécutifs au carré.

iii. Déterminant de VanderMonde lacunaire.

V RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES DETERMINANTS

iv. Calcul d'un déterminant par utilisation de la n linearité :

v. Nombres de racines d'un déterminant.

vi. Utilisation de la définition : calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.