Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Les objectifs de ce chapitre sont :
- Étant donné une matrice carrée, trouver une matrice semblable à celle-ci "simple".
- Étant donné un endomorphisme, trouver une base dans laquelle sa matrice est "simple".

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Sauf mention contraire, E sera considéré de dimension finie n.

I Sous-espace stable

I.1 Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace $F \subset E$ est f-stable lorsque $f(F) \subset F$.

I.2 Exemples et propriétés

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $x \in E$.

- $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont f-stables.
- Si F et G sont f-stables, alors $F \cap G$ est f-stable.
- Le plus petit sous-espace f-stable contenant x est $F_x = \operatorname{Vect}(f^k(x),\ k \in \mathbb{N})$.

Remarque. Il ne faut pas confondre les espaces stables avec les espaces invariants, c'est à dire tels que pour tout éléments x de l'espace, $f(x) = x$.

L'intérêt principal de la notion de sous-espace stable réside dans le fait que la restriction d'un endomorphisme f à un sous-espace stable est toujours un endomorphisme (ce qui n'est bien sûr pas le cas pour un sous espace quelconque). D'ou là définition suivante :

I.3 Endomorphismes induits

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace f-stable. On appelle endomorphisme induit l'application $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f} : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Exercice de cours :
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\widetilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$. À quelle condition $\widetilde{f}$ est-elle bijective ?

I.4 Caractérisation matricielle des SEV stables

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit G un supplémentaire de F dans E. On note B une base adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$. Il est équivalent de dire :

i. F est f-stable.

ii. La matrice M de f dans la base B est de la forme :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \text{A} & \text{B} \\ \hline 0 & \text{C} \end{array}\right)$$

Le résultat ci-dessus possède de nombreuses déclinaisons :

I.5 Situations remarquables

- Cas d'une somme directe de sous-espaces stables.

S'il existe une famille $E_1, ..., E_p$ de sous-espaces vectoriels f-stables tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ et que $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_p$ est une base adaptée à cette somme directe, alors la matrice de f dans une telle base est diagonale par blocs :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{M_p} \end{pmatrix}$$

où chaque bloc M_i est un carré de taille $\dim E_i$ et $M_i = \mathrm{Mat}_{B_i}(f_i)$ avec :

$$f_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & E_i \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

- Cas d'un drapeau stable.

On appelle drapeau de E toute famille $(F_0, ..., F_n)$ strictement croissante telle que :

$$\{0\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n = E$$

Exemple. Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, alors en posant $F_k = \mathbb{R}_k[X]$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, la famille $(F_0, ..., F_n)$ est un drapeau.

Proposition

Le drapeau $F = (F_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est f-stable si et seulement si pour B une base adaptée à ce drapeau, $\mathrm{Mat}_B(f)$ est triangulaire supérieure.

Démonstration.

II Éléments propres d'un endomorphisme

II.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition

On considère ici que E est de dimension quelconque. Soit $x \in E$. On dit que x est un vecteur propre de f lorsque les deux conditions sont vérifiées :

i. $x \neq 0$

ii. $\mathrm{Vect}(x)$ est f-stable

Le deuxième point équivaut à l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Comme le vecteur x est non nul, le scalaire λ ainsi associé à x est unique. Ceci justifie la définition qui suit :

Définition

Soit f un endomorphisme de E. Si $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E^*$ et que $f(x) = \lambda x$, on dit que λ est une valeur propre de f associée au vecteur propre x.

On appellera couple propre de f les couples $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E^*$ vérifiant $f(x) = \lambda x$.

Définition

On appelle spectre de f, noté $\mathrm{Sp}(f)$ ou $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$.

II.2 Espaces propres

Définition

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$. On nomme cet espace vectoriel E_λ l'espace propre associé a la valeur propre λ.

Remarque. Ainsi, d'après la définition d'un vecteur propre, on remarque que E_λ est l'union de l'ensemble des vecteurs propres associés à λ et de $\{0\}$.

Notation. Pour abréger, on notera souvent :
- v.p. pour signifier valeur propre
- $\overrightarrow{\text{v.p.}}$ pour vecteur propre
- $E_\lambda(f)$ pour l'espace propre associé à λ pour f

II.3 Exemples et premières propriétés

- Signification géométrique : Un vecteur x non nul est propre si et seulement si la famille $(x, f(x))$ est liée.

- Caractérisation de la valeur propre 0 : **0 est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement s'il n'est pas injectif. L'espace propre associé est le noyau de f**

- Tous les espaces propres associés à des valeurs propres non nulles sont inclus dans $\mathrm{Im}\, f$.

- Valeurs propres et vecteurs propres d'endomorphismes simples :

Homothéties :
projecteurs : Si p est un projecteur et λ une de ses valeurs propres, alors $\lambda^2 x = p^2(x) = p(x) = \lambda x$ pour $x \in E_\lambda$, donc $\lambda \in \{0, 1\}$.

- Endomorphisme induit sur un espace propre. Un espace propre est stable (mais la réciproque n'est pas vraie) et l'endomorphisme induit est λId_{E_λ}

II.4 Indépendance des vecteurs propres

Proposition

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont libres.

Démonstration. (à connaître)

Voici deux corollaires fort importants :

Proposition (cardinal du spectre)

Si E est de dimension finie n, on a toujours :

$$|\operatorname{Sp}(f)| \leqslant n$$

Ce résultat est faux en dimension quelconque comme le prouve l'exemple suivant :

Exemple. $E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme dérivation.

Encore plus crucial est le résultat suivant (valable lui sans hypothèse de dimension).

Proposition (somme des espaces propres)

Les espaces propres d'un endomorphisme sont toujours en somme directe.

II.5 Éléments propres d'une matrice carrée

Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $X = {}^t(x_1 \cdots x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que X est vecteur propre de M pour la valeur propre λ lorsque $MX = \lambda X$. On note $E_\lambda(M)$ l'espace propre associé à λ.

C'est la même définition que pour les endomorphismes. en effet :

Proposition (lien matrice endomorphisme)

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et B est une base, en notant $M = \mathrm{Mat}_B(f)$ et $X = \mathrm{Mat}_B(x)$, alors :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\iff \lambda \in \mathrm{Sp}(M) \\ x \in E_\lambda(f) &\iff X \in E_\lambda(M) \end{aligned}$$

En particulier on a le résultat suivant.
Deux matrices semblables ont même spectre et des espaces propres de mêmes dimensions :
Le spectre est un invariant de similitude.

Remarque : Influence du corps de base :
Prenons $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ deux corps tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M peut aussi vu comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. Alors, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(M)$.

II.6 Première méthode de recherche des valeurs propres : Equation aux éléments propres

Méthode générale :

Pour chercher les éléments propres de f on pose **l'équation aux éléments propres** :

$$f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$$

et l'on résout en $\overrightarrow{x}$. Les valeurs propres sont les λ tels que cette équation ait des solutions non nulles.

Pour chercher les éléments propres de la matrice carrée M on pose l'équation

$$MX = \lambda X$$

et l'on résout en X. Les valeurs propres sont les λ tels que cette équation ait des solutions non nulles.

Exemple. Trouver les valeurs et vecteurs propres de la matrice M suivante dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La section qui suit fournit un outil théorique plus puissant pour trouver les valeurs propres.

III Polynôme caractéristique

III.1 Définition

Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note χ_M le polynôme caractéristique avec $\chi_M = \det(XI_n - M) \in \mathbb{K}[X]$.
De même si $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E, on appelle χ_f le polynôme caractéristique de f avec $\chi_f = \chi_{\mathrm{Mat}_B(f)}$.
Le polynôme caractéristique de f ne dépend pas de la base B choisie.

En effet, le polynôme caractéristique est un invariant de similitude. Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$\chi_{P^{-1}MP} = \det(XI_n - P^{-1}MP) = \det(P^{-1})\det(XI_n - M)\det(P) = \det(XI_n - M) = \chi_M$$

III.2 Propriétés

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\chi_M = X^n - \mathrm{Tr}(M)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(M)$$

Démonstration.

Remarque. Lorsque E est de dimension 2,

$$\chi_M = X^2 - \mathrm{Tr}(M)X + \det(M).$$

C'est le seul cas où tous les coefficients du polynôme caractéristique doivent être connus.

III.3 Polynôme caractéristique et spectre

Proposition

Soit f un endomorphisme de E. Les racines de χ_f sont exactement les valeurs propres de f.

Démonstration.

Proposition (Spectre des matrices triangulaires ou diagonales)

Si M est triangulaire ou diagonale, alors χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$ et les valeurs propres sont exactement les termes diagonaux.

En effet :

$$\det(XI_n - M) = \begin{vmatrix} X - m_{11} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & X - m_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(X - m_{ii})$$

En revanche attention :
Pour une matrice quelconque, les éléments diagonaux et les valeurs propres n'ont en général rien de commun.

III.4 Existence de valeurs et vecteurs propres

Proposition

Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), alors tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède au moins une valeur propre.

Démonstration.

Ce résultat est aussi équivalent à l'existence d'un vecteur propre, ou, plus géométriquement, à l'existence d'une droite stable. Il est bien-sûr vrai dans les espaces vectoriels complexes.

Pour le cas réel on a :

Corollaire

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension impaire possède une valeur propre réelle.

III.5 Multiplicité des valeurs propres

Définition

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ et on note m_λ sa multiplicité en tant que racine de χ_M.

Si χ_M est scindé, comme il est unitaire il s'écrit ainsi :

$$\chi_M = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

Remarque. On écrira aussi parfois, en notant $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la liste des valeurs propres comptées avec leur multiplicité :

$$\chi_M = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$$

Il sera important de bien identifier à chaque fois laquelle des convention est utilisée.

III.6 Trace et déterminant

Proposition (trace, déterminant et valeurs propres)

Lorsque χ_M est scindé (donc en particulier lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(M) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ \det(M) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned}$$

Si M est une matrice à coefficients dans un sous-corps de $\mathbb{C}$ Les très importantes relations ci-dessus justifient qu'on parle de spectre complexe de M comme l'ensemble des racines de χ_M dans $\mathbb{C}$.

Dans le cas des matrices à coefficients réels, on en déduit :

Corollaire

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ une valeur propre complexe de M . Alors $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M, et est de même multiplicité que M.

III.7 Matrices diagonales et triangulaires par blocs

Proposition

Si M est diagonale ou triangulaire par blocs, χ_M est le produit des polynômes caractéristiques de ses blocs diagonaux.

III.8 Polynôme caractéristique et endomorphisme induit

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel F-stable de dimension r. On note $\widetilde{f}$ l'endomorphisme induit sur F. Alors $\chi_{\widetilde{f}}$ divise χ_f.

Démonstration.

IV Premier théorème de diagonalisation

IV.1 Définitions

Définition

Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f. Une telle base s'appellera une base propre.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Bien sur ces définitions coïncident :

Proposition

Soit f un endomorphisme de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i. Il existe B_0 une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{B_0}(f)$ soit diagonale.

ii. Il existe B_1 une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{B_1}(f)$ soit diagonalisable.

iii. Pour toute base B de E, $\mathrm{Mat}_B(f)$ est diagonalisable.

Remarque. Ordre des valeurs propres ?
Puisque les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux et que le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, la matrice diagonale à laquelle est semblable une matrice diagonalisable est unique à l'ordre près de ses coefficients diagonaux. Plus précisément, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors :

$$\begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix} = P_\sigma \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix} P_\sigma^{-1}$$

avec P_σ la matrice de passage relative à la permutation σ.

IV.2 Dimension et multiplicité

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant m_\lambda$$

Démonstration.

En particulier les valeurs propres de multiplicité 1 donnent une situation toujours facile à étudier :

Proposition (valeurs propres simples)

On dit qu'une valeur propre est simple si elle est racine simple du polynôme caractéristique.
Si λ est valeur propre simple, alors $\dim E_\lambda(f) = 1$. (réciproque fausse)

L'exemple suivant prouve que la dimension de l'espace propre peut prendre toutes les valeurs entre les deux bornes.

Exemple. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les espaces propres de la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & (0) \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le première théorème majeur de ce chapitre.

IV.3 Première condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est équivalent de dire :

i. f est diagonalisable

ii. $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$

iii. $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = n$

iv. χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$

Démonstration.

IV.4 Deux cas particuliers

Proposition (endomorphismes n'ayant qu'une valeur propre)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice n'ayant qu'une seule valeur propre λ. Alors M est diagonalisable si et seulement si $M = \lambda I_n$.

Démonstration.

Proposition (endomorphimses à valeurs propres simples)

Soit f un endomorphisme de E ayant $n = \dim E$ valeurs propres distinctes. Alors f est diagonalisable.

Démonstration.

Remarque. On a toujours $\sum \dim E_\lambda(f) \leqslant n$. On peut donc remplacer l'hypothèse iii. du théorème par :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) \geqslant n$$

IV.5 Exemples et méthodes

Méthode

i Lorsque on dispose de la matrice, calculer le polynôme caractéristique

ii Pour chaque racine λ du polynôme caractéristique poser l'équation aux valeurs propres et résoudre le système correspondant **en particulier, déterminer le rang de la matrice $M - \lambda I_n$ permet de calculer la dimension de l'espace propre.**

iii Pour montrer que la matrice est diagonalisable, vérifier que la somme des dimensions des espaces propres est au moins égale à dimension de l'espace, ou que pour toute valeur propre non simple elle est égale à la multiplicité

iv Pour finir la diagonalisation (dans le cas diagonalisable) trouver pour chaque valeur propre une base de l'espace propre associé et concatener ces bases en une base de E.

Exemple. Diagonalisabilité et le cas échéant diagonalisation des matrice :

$$N_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & b & b \\ a & b & b \end{pmatrix} \text{ et } M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$$

Exemple. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il a une valeur propre non nulle.

Exemple. Prenons $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère ϕ l'application suivante :

$$\phi : \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & (3X+1)P' - 2P \end{array} \right.$$

ϕ est-elle diagonalisable ?

Exemple. Soit $F \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Φ_f définie ci-dessous est-elle diagonalisable ?

$$\Phi_f : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array} \right.$$

V Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs

V.1 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, avec $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k$. $P(f)$ s'appelle un polynôme en f.
De même, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $P(M) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k M^k$ le polynôme en M.

Remarques sur les notations :

$$f^0 = Id$$
$$M^0 = I_n$$
$$f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f(\text{ n facteurs })$$

V.2 Opérations

Proposition

Soit $f \in \mathcal{E}$. L'application Φ_f définie ci-dessous est un morphisme d'algèbre :

$$\Phi_f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(f) \end{array} \right.$$

$\mathbb{K}[f]$ est la plus petite sous-algèbre contenant f (sous algèbre engendrée pas f). Elle est commutative.

De même l'algèbre $\mathbb{K}[M]$ est la sous- algèbre engendrée par la matrice carrée M.

Signification : On calcule algébriquement de la même façon avec les polynômes en f ou M qu'avec les polynômes en une variable formelle X.
Par exemple : Avec le polynôme $X^2 - X$ on obtient :

Et avec le polynôme $(X-1)^n$ on obtient :

Remarque. Quelques pièges à éviter lors du calcul dans cette algèbre.

— Attention au terme constant :

— Attention à la cohérence des objets ! Pour le mauvais exemple, voici une succession de "calculs" dont les deux dernières lignes sont complètement dénuées de sens :

$$\begin{aligned} P \times Q(f)(x) &= P(f)(Q(f)(x)) \\ &= P(f) \circ Q(f)(x) \\ ! &= P(Q(f)(x)) \\ ! &= P(f)(Q(f(x)) \end{aligned}$$

— Attention : l'algèbre des polynômes en f (ou M) n'est pas intègre. On ne peut pas simplifier. Par exemple :

Proposition (propriétés élémentaires)

i. Lien matrice endomorphisme.

$$\text{si } M = \mathrm{Mat}_B(f), \text{ alors } P(M) \text{ est la matrice } \mathrm{Mat}_B(P(f)).$$

ii. Effet d'un changement de base :

$$\text{Si } M = Q^{-1}NQ, \text{ alors } P(M) = Q^{-1}P(N)Q.$$

iii. (espaces stables)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel f-stable. Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, F est aussi stable par $P(f)$.

iv. les espaces $\ker P(f)$ et $\operatorname{Im} P(f)$ sont stables par f pour tout polynôme P.

v. (spectre)
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(f))$.

Un exemple : Algèbre des polynômes en M lorsque M est diagonale à valeurs propres simples

V.3 Polynômes annulateurs

Nous définissons maintenant une nouvelle notion, qui est ressemble à la précédente mais est différente : il est important de ne pas les confondre.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P annule f lorsque $P(f) = 0$. On dit aussi que P est un polynôme annulateur de f.

Exemple.
- Si p est un projecteur, alors $X(X-1)$ annule p.
- Si s est une symétrie, alors $X^2 - 1$ annule s.
- Si f est nilpotent d'indice r, alors X^n annule f pour tout $n \geq r$.

V.4 Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs. Polynôme minimal

Proposition

Si E est de dimension finie, $\mathcal{I}(f) \neq \{0\}$, et f admet des polynômes annulateurs.

En revanche les polynômes annulateurs ne sont jamais uniques.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble $\mathcal{I}(f) = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(f) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de f (c'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$).

Polynôme minimal

Parmi les polynômes annulateurs, l'un est plus intéressant que les autres.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

i. Il existe un unique polynôme annulateur μ de f de degré minimal et unitaire.

ii. Si Q est un autre polynôme annulateur de f, il est multiple de μ.

μ s'appelle polynôme minimal annulateur de f. On le note généralement μ_f ou π_f.

Autrement dit on a l'éqalité :

$$\mathcal{I}(f) = \mu_f \mathbb{K}[X]$$

Démonstration. Cette preuve doit être connue !

Exemple. Cas d'un projecteur.
Si p est un projecteur, trois cas sont possibles :
- Si $p = id$, alors $\mu_p = X - 1$.
- Si $p = 0$, alors $\mu_p = X$.
- Sinon, $\mu_p = X(X-1)$.

Exemple. Si f est nilpotent d'indice r, alors $\mu_f = X^r$.

Exemple. Que peut on dire d'une matrice telle que $M^5 = M^2$ et $M^4 - 6M^2 + I = 0$?

Plus généralement, que peut on dire si deux f est annulée par les deux polynômes P et Q ?

V.5 Propriétés des polynômes annulateurs

Proposition (invariance par similitude)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E, on note $M = \mathrm{Mat}_B(f)$.

- Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(f) = 0$ si et seulement si $P(M) = 0$.
- f et M ont le même polynôme minimal.
- Le polynôme minimal est un invariant de similitude.

Proposition (lien avec le spectre)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

i. Le spectre de f est **inclus** dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.
ii. Le spectre de f est **égal** à l'ensemble des racines du polynôme minimal.

Remarque. On ne peut rien conclure pour l'instant sur la multiplicité des racines dans le polynôme minimal.

Proposition (degré du polynôme minimal)

Le degré du polynôme minimal est égal à la dimension de $\mathbb{K}[X]$. De plus, si on note celui-ci n_0, alors $(\mathrm{id}, f, ..., f^{n_0-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$.

Démonstration.

La démonstration ci dessus suggère une première méthode pour déterminer le polynôme minimal, l'une d'elles consiste à calculer quelques puissances successives de f jusqu'à trouver une combinaison linéaire non triviale.

Exemples :On note $J = (1)_{i,j \in [\![1,n]\!]^2}$. Calculer μ_J.
Déterminer le polynôme annulateur de la matrice $M_{a,b}$ précédemment définie.

Remarque :
En dimension infinie,le polynôme minimal peut ne pas exister :

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère f définie ci-dessous :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & XP \end{array} \right.$$

Montrer que f n'a pas de polynôme annulateur.

Proposition (complément sur $\mathbb{K}[f]$)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
L'algèbre $\mathbb{K}[f]$ n'est en général pas intègre.
Si f est inversible f^{-1} est un polynôme en f.
Plus généralement Les élements inversibles de $\mathbb{K}[f]$ sont les $P(f)$ ou P est premier avec μ_f et leur inverse est un polynôme en f.

Démonstration.

V.6 Le théorème de Cayley-Hamilton

Théorème (Cayley Hamilton)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f.

La démonstration de ce théorème est hors programme et sera vue en exercice.

Corollaire

Le théorème s'énonce de façon équivalente : μ_f divise χ_f.

Conséquences :

- La multiplicité d'une racine λ du polynôme minimal est inférieure ou égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.

- Le degré du polynôme minimal est toujours inférieur ou égal à n.

- En dimension 2, il est toujours facile de trouver un polynôme annulateur.

-En dimension supérieure, le théorème de Cayley Hamilton peut servir à trouver un polynôme annulateur explicite, mais son intérêt est surtout théorique.

Un exemple important : Matrices compagnon.

On appelle matrice compagnon une matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que pour la matrice M ci-dessous, on a $\chi_M = \mu_M = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Le théorème de Cayley-Hamilton est un outil efficace. A titre d'exemple retrouvons un résultat vu par ailleurs :

Proposition (indice de nilpotence)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si n est la dimension de E, f est nilpotent $\Leftrightarrow \chi_f = X^n \Leftrightarrow f^n = 0$.

Ainsi, pour les endomorphismes nilpotent, le théorème de Cayley-Hamilton veut exactement dire que **l'indice de nilpotence est plus petit que la dimension.**

VI Lemme des noyaux et diagonalisation

Dans ce paragraphe, on utilise la notion de polynôme annulateur pour diagonaliser.

VI.1 Lemme des noyaux

Théorème (Lemme des noyaux)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $P \wedge Q = 1$. Alors :

$$\ker P(f) \oplus \ker Q(f) = \ker PQ(f)$$

La démonstration qui suit doit être comprise de façon approfondie.

Démonstration.

Théorème (variante à r polynômes)

Soient $P_1, ..., P_r$ n polynômes premiers entre eux deux à deux. Alors :

$$\ker\left(\left(\prod_{i=1}^{r} P_i\right)(f)\right) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(f))$$

Démonstration. Il suffit de procéder par récurrence sur r en utilisant l'associativité de la somme directe.

VI.2 Le second théorème de diagonalisation

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est équivalent de dire :

i. f est diagonalisable

ii. μ_f est scindé à racines simples

iii. Il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples

Démonstration.

VI.3 Exemples

i. Retrouvons la condition de diagonalisabilité des matrices n'ayant qu'une valeur propre.

Remarque. Pour fabriquer une matrice M non diagonalisable, il suffit de prendre :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$$

avec $(*)$ contenant des coefficients non nuls. Le polynôme minimal n'aura donc qu'une racine et sera différent de $X - \lambda$, il ne sera pas scindé à racines simples et M ne sera pas diagonalisable.

ii. Projecteurs et symétries.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. $X^2 - X = X(X-1)$ annule p et est scindé à racines simples, donc p est diagonalisable.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ annule s et est scindé à racines simples, donc s est diagonalisable (dans un corps de caractéristique strictement supérieure à 2).

Remarque. Les deux exemples ci-dessus montrent que **les multiplicités des valeurs propres et les dimensions des espaces propres ne peuvent être connues à partir du polynôme minimal.**

iii. (Éléments d'ordres finis dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)
Soit $f \in\mathrm{GL}(\mathbb{C})$ tel que $f^n = \mathrm{id}$. Alors $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{U}$ et f est diagonalisable.

Soit en particulier $P \in\mathrm{GL}(\mathbb{C})$ une matrice de permutation associé à une permutation σ. P est diagonalisable.

iv. Remarque sur le corps de base Considérons M la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \end{pmatrix}$$

$M^7 = I_2$ donc M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
$\chi_M = X^2 - 2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) X + 1 = \left(X - \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)\right)\left(X - \exp\left(-\frac{2i\pi}{7}\right)\right)$ ainsi M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car ses valeurs propres ne sont pas réelles.

VI.4 Induits de diagonalisables

Une application théorique majeure du second théorème de diagonalisation est le suivant :

Théorème

Soit f un endomorphisme diagonalisable.
Soit F un sous-espace f-stable.
L'endomorphisme f_F induit par f sur F est encore diagonalisable.

Démonstration.

Ce résultat possède un analogue matriciel immédiat.

VII Endomorphismes trigonalisables.

On constate qu'il y a deux obstructions majeures à la diagonalisation d'un endomorphisme :

i. Un polynôme caractéristique non scindé (ou le polynôme minimal)
ii. Une dimension de l'espace propre plus petite que la multiplicité de la racine dans le polynôme caractéristique (ou une valeur propre non simple dans le polynôme minimal).

Nous allons maintenant réduire des matrices dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé mais les dimensions des espaces propres ne sont pas assez grandes pour que l'endomorphisme soit diagonalisable.

VII.1 Matrices et endomorphismes trigonalisables

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est trigonalisable lorsqu'il existe une base B dans laquelle $\mathrm{Mat}_B(f)$ est triangulaire.
On dit qu'une matrice carrée M est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Remarque. Si M est semblable à une matrice triangulaire inférieure, alors elle est aussi semblable à une matrice triangulaire inférieure. En général, on considère des matrices triangulaire supérieures.

VII.2 Théorème de trigonalisabilité

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est trigonalisable dans $\mathbb{K}$
ii. χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$
iii. μ_f est scindé sur $\mathbb{K}$
iv. Il existe un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$

Corollaire

En dimension finie, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout endomorphisme est trigonalisable.

Démonstration.

Remarque. Contrairement au cas diagonalisable, ou la matrice diagonale est unique à l'ordre près des termes diagonaux, Il n'y a pas jamais unicité de la matrice triangulaire semblable à une matrice donnée.
Par exemple, en dimension 2 on a le résultat suivant :
si $\alpha \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{est semblable à } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En revanche, les termes diagonaux doivent toujours être les valeurs propres.

VII.3 Endomorphismes nilpotents

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est équivalent de dire :

i. f nilpotent
ii. $\chi_f = X^{\dim E}$
iii. $\mu_f = X^p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$
iv. $\mathrm{Sp}_K(f) = \{0\}$ où K est un corps dans lequel χ_f est scindé
v. Il existe une base B telle que $\mathrm{Mat}_B(f)$ soit triangulaire supérieure stricte.

Démonstration.

Les endomorphismes nilpotents sont " à l'opposé des diagonalisables" :

Proposition

si f est diagonalisable et nilpotent, alors il est nul.

La matrice nilpotente de référence

Notons, pour tout n, J_n la matrice dont tous les termes sont nuls saufs ceux de la première surdiagonale qui valent 1 :

$$J_n = (\delta_{j,i+1})_{i,j}$$

La matrice J_n est nilpotente d'indice **exactement** n. Nous montrerons réciproquement que toute matrice nilpotente do'ordre exactement n est semblable à J_n.

VII.4 Pratique de la réduction en dimension 2

La trigonalisation pratique n'est pas un objectif du programme. Cependant il est important de savoir la mener dans le cas des petites dimensions.

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique scindé $\chi_M = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$.
Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$M \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$M \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

VII.5 Pratique de la réduction en dimension 3

Un exemple

la matrice

$$\begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

est elle diagonalisable ? Sinon est elle trigonalisable ? Si oui, la trigonaliser.

la suite de cette section décrit une méthode générale de trigonalisation en dimension 3. Le résultat est hors programme et ne doit pas être connu par coeur.

Cas des endomorphismes nilpotents

On se place dans E de dimension 3. Considérons $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
Si $f^2 \neq 0$: Soit $x \notin \ker f^2$. On pose $B = (f^2(x), f(x), x)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $f^2 = 0$: Alors $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$. Soit $x \notin \ker f$. Comme $\dim \ker f = 2$, on peut choisir $y \in \ker f$ tel que $B = (y, f(x), x)$ soit une base de E. Alors :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas des endomorphismes à 2 valeurs propres

On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 et que $\chi_f = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2$.
Si $\dim E_{\lambda_2}(f) = 2$: f est diagonalisable.
Si $\dim E_{\lambda_2}(f) = 1$: f n'est pas diagonalisable. On peut choisir $e_1 \in E_{\lambda_1}$, $e_2 \in E_{\lambda_2}$, et compléter la famille ainsi obtenue en une base. On a ainsi :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Une autre solution est d'utiliser le lemme des noyaux :

$$E = \ker \chi_f(f) = \underbrace{\ker(f - \lambda_1 \cdot \mathrm{id})}_{E_{\lambda_1}(f)} \oplus \underbrace{\ker((f - \lambda_2 \cdot \mathrm{id})^2)}_{C_{\lambda_2}(f)}$$

$C_{\lambda_2}(f)$ est stable par f puisque c'est le noyau d'un polynôme en f, donc on peut définir f_2 l'endomorphisme induit sur $C_{\lambda_2}(f)$. f_2 est un endomorphisme défini sur un espace de dimension 2, on peut donc le réduire comme on l'a vu précédemment. On en déduit une forme réduite "optimale" de la matrice de f :

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Récapitulatif pour la dimension 3

<table>
<tr><td></td><td>forme réduite</td><td>μ_f</td></tr>
<tr><td>3 v.p. distinctes</td><td>$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$</td><td>$\chi_f = \mu_f = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2 valeurs propres</td><td>$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$</td><td>$\mu_f = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$</td><td>$\chi_f = \mu_f = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Une valeur propre</td><td>$\lambda_1 I_3$</td><td>$\mu_f = X - \lambda_1$</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$</td><td>$\mu_f = (X - \lambda_1)^2$</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$</td><td>$\mu_f = \chi_f = (X - \lambda_1)^3$</td></tr>
</table>

VII.6 Application de la trigonalisation

Si la trigonalisation est en pratique difficile, elle possède beaucoup d'utilisations théoriques. Cette section propose divers exemples de ce fait.
Il sont valables dans le cas des polynômes caractéristiques scindés. Quitte à se placer dans une clôture algébrique de $\mathbb{K}$ (en pratique dans $\mathbb{C}$) on peut toujours se ramener à ce cas.

Proposition (Trace et déterminant)

Si $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ est la liste des valeurs propres avec répétitions dans $\mathbb{C}$:

- $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
- $\det(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

Si $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et les valeurs propres sont données sans répétition alors :

- $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{p} m(\lambda_i)\lambda_i$
- $\det(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{m(\lambda_i)}$

Proposition (valeur propres des puissances de f)

Si $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ est la liste des valeurs propres avec répétitions :
- pour m entier $\mathrm{Sp}(f^m) = \{\lambda_1^m, ..., \lambda_n^m\}$
- f est inversible si et seulement si les λ_i sont tous non nuls. Dans ce cas, $\mathrm{Sp}(f^{-1}) = \{\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}\}$.

Démonstration.

A titre d'exemple traitons l'exercice classique suivant :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que toutes les valeurs propres de M sont de modules distincts. Déterminer

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{\mathrm{Tr}(M^{p+1})}{\mathrm{Tr}(M^p)}$$

(Un autre exercice extrêmement classique est le suivant : Déterminer les matrice M vérifiant $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$ pour tout $k > 0$)

VII.7 Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé

Cette section fournit une forme triangulaire particulière valable pour tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé (et donc en particulier toujours valable dans $\mathbb{C}$. C'est cette forme que l'on privilégiera dans les exercices théoriques.

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ à polynôme caractéristique scindé. On note $\chi_f = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$. On appelle $C_i(f) = \ker\left((f - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{m_i}\right)$ le sous-espace caractéristique de f relatif à la valeur propre λ_i.

Ces espaces ont les propriétés suivantes :

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ à polynôme caractéristique scindé. On note $\chi_f = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$ Alors :

i. La dimension de $C_i(f)$ est égale à la multiplicité m_i de la valeur propre λ_i.
ii. Chaque $C_i(f)$ est stable par f
iii. L'induit f_i de f sur C_i n'a qu'une valeur propre : λ_i
iv. $E = \bigoplus_{i=1}^{r} C_i(f)$

Qualitativement : les espaces caractéristiques "séparent" les valeurs propres de f et ramènenet à l'étude d'endomorphismes n'ayant qu'une valeur propre. Cette séparation est due au lemme des noyaux. Il est important de retenir cette idée.

Démonstration.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ au polynôme caractéristique scindé sur$\mathbb{K}$. On note $\lambda_1, ...\lambda_r$ et $C_1, ..., C_r$ les sous-espaces caractéristiques associés. Alors il existe B une base de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\dim C_1} + N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{\dim C_r} + N_r \end{pmatrix}$$

avec $N_i \in \mathcal{M}_{\dim C_i}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure stricte pour $i \in [\![1, r]\!]$.

Démonstration.

Remarque. Il s'agit de la forme la plus fine de réduction qui soit au programme. On peut à partir de cette forme retrouver les principaux éléments du cours. A titre d'exemple :

a) En utilisant la réduction en sous espaces caractéristique, retrouver les théorèmes de diagnalisation.

b) En utilisant la réduction en sous-espaces caractéristique, redémontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

Pour finir, voici un résultat hors programme mais très classique :

Théorème : Décomposition de Dunford (HP)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ au polynôme caractéristique scindé sur$\mathbb{K}$. Alors il existe $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que :

i. $f = n + d$
ii. n nilpotent
iii. d diagonalisable
iv. $dn = nd$

Démonstration.

Remarque. On peut en plus prouver les résultats suivants : cette décomposition est unique et les endomorphismes d et n sont des polynômes en f.

VIII Compléments et applications

Cette section fournit quelques exemples d'application de la réduction des endomorphismes.

VIII.1 Calcul de puissance

Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer A^n, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}$.
$\boxed{1M}$ Trouver un polynôme annulateur :
Si l'on dispose d'un polynôme annulateur de A de petit degré, on peut utiliser la division euclidienne de X^n par μ_A. Ainsi, il ne reste plus qu'à calculer le reste de la division pour déterminer A^n. On obtient A^n sous la forme d'une combinaison linéaire de $I, ..., A^{\deg \mu_A}$.
Si μ_A est scindé à racines simples, on peut déterminer le reste à partir des relations $\lambda_i^n = R_n(\lambda_i)$. Dans le cas où certaines racines sont multiples, on peut dériver plusieurs fois la relation $X^n = R_n$ et l'évaluer en λ_i.

Exemple. Calculer $M_{1,b}^p$ pour $b \in \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}$ (la matrice $M_{a,b}$ est celle d'un exemple précédent).

$\boxed{2M}$ Réduire la matrice :

- Si A est diagonalisable, on peut parfois la diagonaliser explicitement en $A = P^{-1}DP$ ce qui nous donne $A^n = P^{-1}D^nP$.

Exemple. Calculer $M_{1,b}^p$ pour $b \in \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}$ en utilisant cette méthode.

- Un exemple non diagonalisable : Calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ puis généraliser.

- Plus généralement Si A n'est pas diagonalisable, on utilise la décomposition en sous-espaces caractéristiques. On a donc :

$$A^n = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\dim C_1} + N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{\dim C_r} + N_r \end{pmatrix}^n P$$

Or, si N est nilpotente d'ordre r, on a $(\lambda I + N)^n = \lambda^n \sum\limits_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \lambda^{-k} N^k$. Aussi, à k fixé, $\binom{n}{k}$ est un polynôme en n. Ainsi, $(\lambda I + N)^n = \lambda^n P(n)$, où P est un polynôme à coefficients matriciels. Alors, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au polynôme caractéristique $\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$ scindé sur $\mathbb{K}$, il existe $P_1, ..., P_r$ des polynômes à coefficients matriciels de degrés inférieurs à p tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n P_i(n)$$

VIII.2 Exemples d'endomorphismes matriciels et polynômiaux

Le cours de réduction peut s'appliquer dans tous les espaces de dimension finie. C'est en particulier le cas lorsque les vecteurs sont des matrices, des polynômes et parfois des fonctions. Ceci fournit une grande variété de situations. En voici quelques exemples.

VIII.3 Matrices qui commutent. Coréduction

Espaces propres et commutant

Cette section présente un résultat élémentaire relatif aux espaces propres qui sera très utile par la suite. **La démonstration, très élémentaire doit savoir être refaite.**

Proposition

Soient f et g deux endomorphismes. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Alors les espaces propres de f sont stables par g (et symétriquement ceux de g par f).

Première application : Commutant d'un endomorphisme (matrice) diagonalisable.

Seconde application : Existence d'un vecteur propre commun.

Codiagonalisabilité.
Commencons par répondre aux questions suivantes (on suppose f et g diagonalisables) :

i. $f + Id$ est il diagonalisable ?
ii. f^2 est il diagonalisable ?
iii. $f + g$ est il diagonalisable ?
iv. fg est il diagonalisable ?

Ceci rend intéressante la question de l'existence d'une base commune de vecteurs propres (on dit alors que les deux endomorphismes sont simultanément diagonaliables, ou codiagonalisables)
On a clairement la condition nécessaire :

pour que f et g soient simultanément diagonalisables, il est nécessaire qu'ils commutent

Nous verrons en exercice que la réciproque est vraie.

VIII.4 Exemples en dimension infinie

Que reste t'il des théorèmes précédents en dimension infinie ?
Les aspects géométriques sont conservées (somme directe des espaces propres, lemme des noyaux....) les aspects liés à la dimension et au polynôme caractéristique(multiplicités, dimensions des espaces propres, existence de vp) sont perdus.

Exemples : que penser des opérateurs $P \mapsto XP$, $P \mapsto XP'$ et $P \mapsto P'$ dans l'espace des polynômes ?

VIII.5 Exemples de réduction par blocs

VIII.6 Que faire quand le polynôme caractéristique n'est pas scindé ?

Le dernier cas que nous n'avons pas étudié est celui dans lequel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et ou le polynôme caractéristique n'est pas scindé.
Dans ce cas la seul chose qu'on sait dire pour l'instant est : l'endomorphisme n'est ni trigonalisable ni diagonalisable via le corps des nombres réels.
Il y a deux statégies possibles :
-réduire dans le corps des nombres complexes
-Trouver une "autre" forme réduite.

dans ce second cas, aucune connaissance n'est au programme et la forme réduite sera toujours donnée. En voici un exemple.

IX Aspects topologiques

On considère dans cette partie que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Hormis les résultats élémentaires rappelés ci-dessous, aucun résultat de topologie n'est explicitement exigible. Il est cependant fort recommandé de les connaître.

IX.1 Résultats élémentaires

On a les faits suivants
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense
- $P \longmapsto P^{-1}$ est une application continue
- Les applications linéaires sont continues (dimension finie)
  En particulier c'est le cas de $X \mapsto MX$ de $M \mapsto MX$ de $M \mapsto P^{-1}MP$.
  A titre d'exemple : que penser topologiquement de l'ensemble des endomorphisme dont un vecteur donné et vecteur propre ?
- La définition de la norme subordonnée, en rappelant qu'elle n'est pas au programme.
- L'application $A \mapsto \chi_A$ est continue.
- L'ensemble des matrices orthogonales est compact.
- (moins trivial, HP) l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

IX.2 Propriétés topologiques de l'ensemble des matrices diagonalisables

Cette section sera étudiée après le cours de topologie.
La propriété ci-dessous est hors programme, mais elle est très classique et facile à démontrer. Il faut la connaître.

Proposition

L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration.

Remarque. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est faux.

Exercice :
L'intérieur de l'ensemble des matrices diagonales est l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes.
Dans le même ordre d'idée voici un autre résultat topologique d'approximation par des matrices diagonalisables :

Proposition

Soit M une matrice complexe et soit $\varepsilon > 0$. Alors M est semblable à une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont inférieurs en module à ε

La preuve est laissée en exercice.

IX.3 Rayon spectral

Définition

On appelle rayon spectral d'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel le réel $\rho(f) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(f)\}$.

Le rayon spectral (hors programme) est par exemple un indicateur du comportement de la suite $(f^n)_n$

IX.4 Matrices dont la suite des puissances tend vers 0

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i. $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ii. $\mathrm{Tr}(A^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

iii. $\rho(A) < 1$

Démonstration.

Proposition

Soit $|||\cdot|||$ la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^p$, et soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors :

$$\rho(A) \leqslant |||A|||$$

Démonstration. Pour λ une valeur propre de module $\rho(A)$ et X un vecteur propre associé, $\|AX\| = \rho(A)\|X\|$ d'où $\rho(A) \leqslant |||A|||$.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute norme N on a :

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} N(A^n)^{1/n}$$

Démonstration.

IX.5 Divers de topologie

Exemple. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Montrer que sa classe de similitude est fermée.

Exemple. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement s'il existe une suite de matrices semblables à A tendant vers 0.