Espaces vectoriels normés
Topologie

Dans l'ensemble du chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Normes et distances

Le but de ce paragraphe est d'introduire un objet qui généralise la valeur absolue (le module) à des espaces vectoriels plus généraux.

I.1 Définition

Définition

Soit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que N est une norme si elle vérifie les axiomes suivants :

— $\forall\, x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ (positivité)
— $\forall\, x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)
— $\forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
— $\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Si tous les points sont vérifiés sauf la séparation, on parle de semi-norme.

Remarque. La définition entraîne immédiatement l'inégalité triangulaire généralisée :

$$\forall\, (x_1, ..., x_n) \in E^n,\ \forall\, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ N\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| N(x_i)$$

Les notations usuelles pour les normes sont $N, \|, \|$.

Le couple (E, N) lorsque N est une norme sur E est appelé un espace vectoriel normé.

Définition

On dit d'un vecteur x qu'il est unitaire lorsque sa norme vaut 1.

Si x est un vecteur non nul, le vecteur $\frac{x}{N(x)}$ est unitaire.

Une droite réelle contient deux vecteurs unitaires alors que dans le cas complexe elle en contient une infinité.

I.2 Normes de références

Normes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Lorsque l'espace vectoriel E est le corps de base, la norme est toujours la valeur absolue (ou le module)

Les normes infinies (ou normes sup)

a) Dans $E = \mathbb{R}^n$. Pour un vecteur $x = (x_1, ..., x_n)$, on note

$$\|x\|_\infty = \sup |x_i|$$

b)Dans l'espace E des fonctions bornée de X dans $\mathbb{K}$, alors on définit :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Ce sont bien des normes **(preuve à connaître)** :

Les normes 1 (ou norme de la convergence en moyenne)

a) Dans $E = \mathbb{K}^n$. Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ dans E, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

b) Dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Remarque. Si f n'est que continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $\|\cdot\|_1$ n'est qu'une semi-norme.

Norme 2 (ou norme euclidienne)

Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel préhilbertien, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Alors l'application qui a $x \in E$ associe $\sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une norme, que l'on dit induite du produit scalaire sur E.

Exemple. Les normes classique de ce type sont :
$E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ dans E, on note

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$. Pour f dans E, on note :

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f(t)^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Dans le cas d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel les mêmes applications sont des normes sous réserve de mettre un module : .

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Stratégies pour montrer qu'on a une norme

En général, les normes rencontrées sont de l'un des trois types précédents. Sur les 4 axiomes à vérifier, il est rare qu'il y en ait plus d'un qui soit difficile.
Par exemple pour les norme infinies, il faut être soigneux dans la rédaction de l'inégalité triangulaire.
Pour les normes faisant intervenir des intégrales il importe que f soit **continue** pour l'axiome de séparation.
Les plus délicates sont les normes 2 : si l'on soupçonne qu'une normes est euclidienne, la méthode consiste à trouver le produit scalaire dont elle dérive :

Exemple. On se place sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que N définit une norme :

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t}$$

Autres normes

Dans cette section p est un réel au moins égal à 1. On se place sur $E = \mathbb{K}^n$. Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ dans E, on note $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$. Si f est une fonction de $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$, on note :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

On peut montrer (ceci sera vu en exercice) que l'on définit bien ainsi des normes.

I.3 Sous espace d'un espace normé

Proposition

Soit (E, N) un EVN, et F un sous-espace vectoriel de E. La restriction de N à F est encore une norme, appelée norme induite. On dit que le couple $(F, \widetilde{N})$ est un sous-espace vectoriel normé de (E, N).

par exemple, la norme 1 intégrale est une norme sur $\mathbb{R}[X]$ vérifions le :

Nous verrons plus tard l'intérêt de cette notion.

I.4 Distance associée à une norme

.

Définition

Soit E un ensemble. Une distance sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

— $d(x, y) \geqslant 0$
— $d(x, y) = 0$ si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$
— $d(x, y) = d(y, x)$
— $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

(E, d) s'appelle un espace métrique.

Visualisation d'une distance :

Proposition

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On définit $d(x, y) = N(x - y)$ pour x et y dans E. Alors d est une distance sur E, appelée distance induite par la norme N.

Remarque. Ceci signifie que les espaces vectoriels normés sont des cas particuliers d'espace métrique.s La notion de distance est importante pour visualiser les objets manipulés. La plupart des résultats qui vont suivre est en fait valable dans n'importe quel espace métrique. Mais conformément au programme nous ne travaillons que dans des espaces vectoriels normés.

II Propriétés générales des espaces normés

II.1 Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Définition

Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$. On pose :

$$B(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) < r\} \text{ (la boule ouverte de centre } x_0 \text{ et de rayon } r\text{)}$$

$$B_f(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) \leqslant r\} \text{ (la boule fermée de centre } x_0 \text{ et de rayon } r\text{)}$$

$$S(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) = r\} \text{ (la sphère de centre } x_0 \text{ et de rayon } r\text{)}$$

En utilisant la norme, ceci s'écrit de façon équivalente

$$B(x_0, r) = \{x \in E,\ N(x - x_0) < r\}$$

Proposition

Dans un espace normé, les boules ouvertes sont convexes, et se déduisent les unes des autres par translations des centres et homothéties des rayons.

Attention : les boules et sphères **dépendent de la norme choisie !**

Exemples en dimension 2 pour les normes usuelles

II.2 Parties bornées

Définition

On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé (E, N) est bornée si :

$$\exists M > 0, \forall x \in A, N(x) \leq M$$

Noter que cela équivaut à dire que A est **inclus dans une boule de centre O.** On peut remarquer que les boules ouvertes ou fermées, les sphères sont des cas particuliers de parties bornées.

Important : la notion de partie bornée (et la constante M) dépend de la norme choisie.Ainsi, on parlera plutot de **partie bornée pour** N

Exemples :
Montrer que l'ensemble $\{(x, y), x^4 + 3y^6 = 4\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ pour la norme 1 et pour la norme infinie.

Montrer que dans $C^0([a, b])$ la boule unité de la norme infinie est bornée pour la norme 1.

Suite bornée

Définition

une suite (u_n) d'un espace vectoriel normé (E, N) est bornée si :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, N(u_n) \leq M$$

Dans une partie bornée, toutes les suites sont bornées. Plus intéressante est la réciproque :

Proposition

pour qu'une partie A soit non bornée il faut et il suffit qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de A telle que $N(u_n) \to +\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

Exemple

II.3 Applications lipschitziennes

Définition

Soient $(E, \|\|_E)$ et $(F, \|\|_F)$ deux espaces normés et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est K-lipschitzienne lorsque :

$$\forall\,(x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y))\|_F \leqslant K\|x - y\|_E$$

On retourve ainsi la définition déjà connue dans le cas des fonctions réelles. Noter qu'à nouveau cette notion **dépend des normes choisies**.

Voici quelques exemples de cette situation. D'abord un rappel :

Proposition

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. f est lipschitzienne de rapport $K = \|f'\|_{\infty,[a,b]}$.

Proposition (interpétation de l'inégalité triangulaire :)

La norme est une application 1 lipschitzienne par rapport à elle même :

Voici enfin un exemple très classique, bien que hors programme.

Proposition (distance à une partie)

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $A \subset E$, avec $A \neq \emptyset$. On pose $d(x, A) = \inf\{d(x, y),\ y \in A\}$. Alors l'application ϕ définie ci-dessous est 1-lipschitzienne :

$$\phi : \left|\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}\right.$$

Proposition : la fonction distance à une partie est 1 lipschitzienne.

III Suites dans un EVN

III.1 Définition générale de la convergence des suites

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On dit que u_n tend vers ℓ pour la norme $\|\cdot\|$ (noté $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} \ell$) lorsque

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > N_0,\ \|u_n - \ell\|) \leqslant \epsilon$$

Il est important, dans le cas des espaces vectoriels normé de toujours garder à l'esprit que la convergence des suitesdépend de la norme choisie. C'est pourquoi la notation choisie dans ce cours (même si elle n'est pas officielle) mentionne la norme. Il est conseillé de toujours l'utiliser.

Notons tout de suite le fait suivant :

Proposition

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} \ell$

la suite réelle positive $\|u_n - l\|$ tend vers 0.

L'intérêt remarquable de cette définition est de ramener l'étude de la convergence des suites dans un evn quelconque E à celle de la suite de réels positifs $\|u_n - l\|$. Il en résulte que la majorité des propriétés vues pour les suites numérique reste vraie.

III.2 Propriétés

Proposition

— Une suite qui converge admet exactement une limite.
— Toute suite convergente est bornée.
— Une suite qui converge admet exactement une valeur d'adhérence.(une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge).
— Linéarité : Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge vers $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Remarque. On perd certaines propriétés des suites réelles :

— Le produit et l'inverse de limites (à cause en général de l'absence de ces lois dans E)

— Le théorème de Bolzano-Weierstrass n'est pas vrai dans un espace normé quelconque.

III.3 Convergence dans un espace produit

Proposition

On considère deux EVN $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$.
on munit l'espace $E \times F$ de la norme (appelée norme produit) :
$\|(x, y)\| = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$, on a l'équivalence :

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} (x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_E} x \\ y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_F} y \end{cases}$$

Corollaire

On se place dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
Un suite est convergente si et seulement si chacune de ses composantes converge. La limite est le vecteur des limites de composantes.

Plus généralement, dans un espace de dimension finie. Si la norme choisie est la norme infinie dans une base B, alors la convergence de la suite (u_n) est éuivalente à la convergence de chacune des suites coordonnées.

On parle de convergence coordonnée par coordonnée.

Exemple. Dans $R_3[X]$muni de la norme infinie dans la base canonique, étudier la convergence de la suite

$$P_n = (X - 1)(X - a_n)(X - b_n)$$

où $(a_n)_n$ et (b_n) sont deux suites convergentes.

Un grand classique : Étudier la convergence de la suite de matrices :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}^n$$

III.4 Influence de la norme

Il est très important de noter que sur un même espace vectoriel les notions de convergence définies par deux normes différentes sont en général différentes :

Exemple. On considère la suite de fonctions $f_n : x \in [0, 1[\longmapsto x^n$. Étudier la convergence de (f_n) pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

IV Comparaison de normes

IV.1 Définitions

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est plus fine que N_2 lorsque :

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, x \in E,\ N_2(x) \leqslant K N_1(x)$$

Définition

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes lorsque :
- N_1 est plus fine que N_2
- N_2 est plus fine que N_1

Autrement dit les normes N_1 et N_2 sont équivalentes lorsque :

$$\exists\, K > 0,\ K' > 0,\ \forall\, x \in E,\ K N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant K' N_1(x)$$

L'équivalence des normes est bien sur une relation d'équivalence.

IV.2 Comparaisons des normes classiques

Les démonstrations de ce paragraphes doivent être connues.

Régle méthodologique

Pour montrer que N_1 est plus finie que N_2 on cherche une constante K telle que la fonction $x \mapsto \frac{N_2(x)}{N_1(x)}$ soit bornée par K.

Normes sur $\mathbb{K}^n$

Proposition

Les trois normes classiques sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes

Normes sur les EVN de dimension infinie

Proposition

Sur $\mathcal{C}^0[a,b],\mathbb{R})$, la norme infinie est plus fine que la norme 1.

Proposition

Sur $\mathcal{C}^0[a,b],\mathbb{R})$, la norme 2 est plus fine que la norme 1.

Nous allons maintenant montrer que ces normes ne sont pas équivalentes :

Régle méthodologique

Pour montrer que N' n'est pas plus fine que N, il faut montrer que $\frac{N}{N'}$ n'est pas majoré.
On cherche donc **une suite** (x_n) **telle que** $\frac{N}{N'}(x_n)$ **tende vers l'infini.**

IV.3 Deux Caractérisation

Proposition

Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes parties bornées

On dispose égalemement de la caractérisation séquentielle suivante :

Proposition

Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent les même suites convergentes :

(Plus précisément : Pour toute suite (u_n) et tout élément $l \in E$, les assertions :

- $(u_n)_n$ tend vers l pour N_1
- (u_n) tend vers l pour N_2

sont équivalentes.)

IV.4 Vocabulaire de la convergence dans l'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$

Comme les normes classiques ne sont pas équivalentes dans cet espace vectoriel, les suites convergentes ne sont pas les mêmes. Pour cette raison nous introduisons dès maintenant deux termes de vocabulaire qui seront très utilisés par la suite.

Définition

Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

— On dit que (f_n) **converge uniformément** vers f sur $[a, b]$ lorsque elle converge pour la norme infnie : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}$ tend vers 0.

— On dit que (f_n) **converge en moyenne** vers f sur $[a, b]$ lorsqu'elle converge pour la norme 1 :$\|f_n - f\|_{1,[a,b]}$ tend vers 0.

Proposition

La convergence uniforme implique la convergence en moyenne et la réciproque est fausse.

V Cas de la dimension finie

V.1 Equivalence des normes

Le théorème majeur de cette section et probablement de tout ce chapitre est le suivant :

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Ce théorème est admis.

V.2 Conséquences

- En dimension finie, il n'existe qu'une seule notion de partie bornée (plus besoin de préciser la norme).

- En dimension finie il n'exsite qu'une seule notion de convergence.

En particulier :

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit (u_n) une suite de E. Il est équivalent de dire :

i. (u_n) converge
ii. il existe une base de E dans laquelle la suite (u_n) converge coordonnée par coordonnée
iii. dans toute base de E, la suite (u_n) converge coordonnée par coordonnée

Un exemple :
dans l'espace $\mathbb{R}_d[X]$, On considère une suite de polynômes unitaires de degré d (P_n) qui converge vers un polynôme P. Montrer que P est unitaire. Quelle est la limite de la suite $P_n(1)$?

Peux on donner les mêmes conclusions si cette fois ci P_n est une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec P_n unitaire de degré n ?

V.3 Complétude des EVN en dimension finie.Series absolument convergentes

Définition

Soit (E, N) un espace normé.
Soit (u_n) une suite de E.
On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum N(u_n)$ est convergente.

Par exemple, considérons la suite de matrices $U_n = \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ Alors la série $\sum U_n$ est absolument convergente.

Théorème

Dans un espace de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente

Démonstration.

On dit que les espaces de dimension finie sont **complets**.

Nous verrons qu'en dimension infinie, ce résultat n'est pas toujours vrai.

VI Topologie des espaces vectoriels normés

La plupart des résultats de cette section sont vrais pour un espace métrique.
On se place dans $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

VI.1 Voisinages d'un point dans $(E, \|\cdot\|)$

Définition

Soit $x_0 \in E$. Soit V une partie de E contenant x_0. On dit que V est un voisinage de x_0 s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x_0, \epsilon) \subset V$.

Proposition

Si V est un voisinage de x_0, alors toute partie contenant V est également un voisinage de x_0.

Si V_1 et V_2 sont des voisinages de x_0, alors $V_1 \cap V_2$ l'est aussi.

VI.2 Ouverts de $(E, \|\cdot\|)$

Définition

On appelle ouvert de E toute partie $\Omega \subset E$ ayant la propriété suivante :

$$\forall x \in \Omega,\ \Omega \text{ est un voisinage de } x$$

Pour comprendre cette définition, étudions les premiers exemples suivants :

Exemples d'ouverts

Proposition

Les boules ouvertes de E sont des ouverts.

Dans le cas $E = \mathbb{R}$ les intervalles $]a, b[,]a, \infty[,]-\infty, b[$ sont des ouverts.

Propriétés des ouverts :

Proposition

-E et $\emptyset$ sont des ouverts.
-la réunion d'une famille **quelconque** d'ouverts est un ouvert
-L'intersection d'une famille **finie** d'ouverts est un ouvert.

Définition

L'ensemble des ouverts de E s'appelle la topologie de E (pour al norme considérée)

Exercice de cours : démontrer la caracatérisation suivante des ouverts :
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- Ω est un ouvert
- Ω est une réunion de boules ouvertes

VI.3 Parties fermées d'un espace vectoriel normé

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN, soit F une partie de E.
On dit que F est un fermé lorsque $E \backslash F$ est un ouvert.

Les fermés sont les complémentaires des ouverts.

Proposition

Les axiomes des fermés sont :
- E est fermé
- $\emptyset$ est fermé
- Toute intersection de fermés est fermée
- Toute réunion finie de fermés est fermée

Démonstration.

Remarque. Attention, **fermé n'est pas le contraire d'ouvert**. En général une partie A n'est ni fermée ni ouverte. Elle peut aussi être ouverte et fermée en même temps !

VI.4 Points adhérents, points isolés

Pour prouver qu'une partie est fermée on dispose d'une première stratégie : prendre son complémentaire et prouver qu'il est ouvert. Cette méthode peut s'avérer très inefficace. On développe ici d'autres outils.

Définition

Soit $A \subset E$. On dit que $x \in E$ est adhérent à A s'il vérifie au choix :

i. $\forall \epsilon > 0,\ B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$

ii. $\exists\,(x_n) \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \longrightarrow x$

On appelle **adhérence** d'une partie A, et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.

Définition

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $A \subset E$. On dit que $x \in A$ est isolé dans A lorsqu'il n'est pas dans l'adhérence de $A \backslash \{x\}$.

Illustration géométrique :

L'adhérence possède les propriétés suivantes (très importantes dans la pratique) :

Théorème

Soit A une partie de E.

— $\overline{A}$ est un fermé

— l'adhérence est croissante : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

— $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A

— A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$

Démonstration.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème (caractérisation séquentielle des fermés)

Soit F une partie de E. Il est équivalent de dire :

i. F est fermé

ii. F contient tous ses points adhérents

iii. pour toute suite <u>convergente</u>$(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$, la limite de la suite (u_n) appartient à F

Méthode pratique

Pour montrer par caractérisation séquentielle qu'une partie F est fermée on procède de la façon suivante.

On prend un point adhérent a.
Par définition, a est la limite d'une suite (u_n) de F.
En utilisant que u_n est dans F, on prouve que $a \in F$.

Exemples Montrons les résultats suivants :

Proposition

— Les boules fermées et les sphères sont des fermés.
— les singletons sont des fermés
— les ensembles finis sont des fermés
— $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$
— Les intervalles suivants $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Proposition

Soit E un EVN. Soient N et N' deux normes équivalentes sur E. Alors les topologies définies par ces deux normes sont égales.
En particulier : dans un espace vectoriel de dimension finie, la notion d'ouvert (de fermé) ne dépend pas de la norme choisie.

Démonstration.

VI.5 Points intérieurs

Définition

Soit A une partie non vide de E. On dit que $x \in A$ est intérieur à A si A est un voisinage de x. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.

Cette notion est duale de la précédente. Dire que x est intérieur à A c'est dire qu'il n'est pas adhérent au complémentaire de A.

Proposition

Soient A et B deux parties de E.
- $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A
- $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$
- A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$
- $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A

Démonstration.

Exemples

Trouver l'adhérence, l'intérieur de :

a) les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $\mathbb{Q}$, $[0, 1] \cup \{2\}$.
b) Une boule fermée en dimension finie.
c) L'ensemble des polynômes unitaires tels que $P(1) = 3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
d) L'ensemble des fonction nulles en zéro pour la norme 1

VI.6 Frontière

Définition

Soit $A \subset E$. On appelle frontière de A l'ensemble $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$.

Proposition

La frontière de A est un fermé.

VI.7 Densité

Définition

Soient A et B deux parties de E. On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.

Les deux exemples suivants doivent être connus :

Exemple. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$.

Nous démontrerons plus tard l'important résultat suivant :

Proposition

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

VI.8 Illustration de la dépendance vis à vis de la norme en dimension infinie

En dimension quelconque un même ensemble peut avoir des propriétés différentes selon la norme choisie.
On pose $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. f est-il fermé pour $\|\cdot\|_1$? pour $\|\cdot\|_\infty$? Quelle est son adhérence ?

VI.9 Topologie des sous-espaces vectoriels (HP)

Le résultat suivant sera montré en exercice. Vous pouvez l'utiliser directement même s'il n'est pas explicitement au programme.

Proposition

Soit (E, N) un espace normé et F un sous espace strict.

F est d'intérieur vide.
Si F est de dimension finie, il est fermé.
Dans tous les cas, l'adhérence de F est un sous espace vectoriel.

VI.10 Topologie relative

Proposition

Soit A une partie de E (qui n'est pas forcément un sous espace vectoriel).

Soit Ω une partie de A. On dit que c'est un ouvert relatif de A si il existe O un ouvert de E tel que $\Omega = O \cap F$.

De même on appelle fermé relatif de A toute partie de A de la forme $A \cap F$ ou F est un fermé de E.

Les ouverts et fermés relatifs ont les mêmes propriétés que les ouverst et fermés (réunion, intersection, voisinages, caractérisation séquentielle) il suffit de restreindre les éléments x considérés à l'ensemble A et les démonstrations sont analogues. Donnons en une pour l'exemple :

si B est un fermé relatif alors il contient tous ses points adhérents (qui sont dans A)

Noter que les ouverts (resp fermés) relatifs, ne sont pas forcément ouverts ou fermés **dans E**.
Par exemple :

Définition

La topologie constituée par les ouverts relatifs s'appelle topologie induite ou topologie relative.

VII Continuité

VII.1 Définitions générales

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et$(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$. On considère

$$f : \left| \begin{array}{lll} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Soit $x_0 \in \overline{A}$. On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in a, \|x - x_0\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - l\|_F \leqslant \epsilon$$

Soit $x_0 \in A$. On dit que f est continue en x_0 lorsque f possède une limite en x_0. Cette limite est forcément $f(x_0)$.

VII.2 Propriétés de base

- noter que ce sont exactement les mêmes définitions que dans le cas réel en remplaçant valeur absolue par norme.

Proposition

la continuité est une propriété topologique, elle est invariante par changement de norme équivalente comme l'énonce la propriété qui suit. En particulier, en dimension finie, il n'y aura pas lieu de préciser la norme choisie.

Démonstration.

Proposition (caractérisation séquentielle)

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$, soit $x_0 \in A$. Il est équivalent de dire :

i. $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$

ii. Pour toute suite (x_n) qui converge vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

Démonstration.

Proposition (composition)

Soient $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $g : B \subset F \longrightarrow G$. On suppose que $f(A) \subset B$. Soit $x_0 \in \overline{A}$. On suppose que $f(x)$ tend vers ℓ en x_0, et que $g(y)$ tend vers ℓ' en ℓ. Alors, $g \circ f(x)$ tend vers ℓ' lorsque x tend vers x_0.

Démonstration.

Corollaire

Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $f \circ g$ est continue en x_0.

VII.3 Applications continues remarquables

Applications lipschitziennes

Proposition

Tout application lipschitzienne est continue.

Définition

On dit que f est uniformément continue sur E lorsque :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Proposition

Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, et toute fonction uniformément continue est continue.

Démonstration.

Les réciproques sont fausses, comme le prouvent les exemples suivants :

VII.4 Etude pratique de la continuité en dimension finie.

En dimension finie, l'étude de la continuité est facilitée par le passage aux coordonnées, grace aux deux résultats suivants :

Proposition (coordonnées dans l'espace d'arrivée)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$. Soit $f : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}^n$. On écrit

$$f(\overrightarrow{x}) = (f_1(\overrightarrow{x}), \ldots, f_n(\overrightarrow{x}))$$

Les applications f_i s'appellent les coordonnées ou composante de f. Alors f est continue si et seulement si toutes les f_i sont continues.

Proposition (continuité des formes linéaires coordonnées)

Soit B une base. si l'on note x_i la coordonnées de x selon e_i alors la forme linéraire coordonnée $e_i^* : E \longrightarrow F : x \mapsto x_i$ est continue.

En composant ces résultats on obtient le théorème suivant :

Proposition

Si E et F sont de dimensions finie, soit $f : E \to F : x \mapsto f(x)$. On suppose que les composantes de f s'obtiennent par composition de fonctions élémentaires continues à partir des coordonnées de x dans une base B. Alors f est continue.

En voici deux exemples importants :

Le déterminant det $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est continu.

L'inversion $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \longmapsto M^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ est continue.

VII.5 Dépendance vis à vis de la norme

En dimension quelconque, la continuité dépend fortement du choix de la norme. Il faudra toujours préciser. Voici un exemples de référence à retenir pour illustrer cette situation.

- Etudier la continuité de l'application $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K}) \mapsto f(0)$ pour les normes classiques.

VII.6 Continuité et topologie

Théorème

Soient E et E' deux espaces normés. Soit $f : E \longrightarrow E'$.
On suppose que f est continie, alors

i. pour tout Ω' ouvert de E', $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E

ii. pour tout F' fermé de E', $f^{-1}(F')$ est un fermé de E

Corollaire

Proposition

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors, le graphe de f $\{(x, y) \in E \times \mathbb{R},\ f(x) = y\}$ est un fermé de $E \times \mathbb{R}$.
Fixons $c \in \mathbb{R}$. Alors :

— $\{x \in E,\ f(x) = c\}$ est un fermé de E

— $\{x \in E,\ f(x) \geqslant c\}$ est un fermé de E

— $\{x \in E,\ f(x) > c\}$ est un ouvert de E

Exemples

Applications aux matrices

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN de dimension quelconque. Soit F un sous-espace vectoriel ou affine de dimension finie de E. Alors F est fermé.

$Gl_n(\mathbb{K})$ est un ouvert.

$Sl_n(\mathbb{K})$ et O_n sont des fermés.

Démonstration.

VII.7 Continuité et densité

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur une partie A de E. On suppose qu'il existe B une partie dense dans A telle que pour tout $x \in B$, $f(x) = g(x)$. Alors f et g coïncident sur A.

Démonstration.

Exemple.

- Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

- Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Application au polynôme caractéristique.

VIII Continuité des applications linéaires et multilinéaires

VIII.1 Le théorème de caractérisation

Proposition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Soit f une application linéaire de E dans F.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. f est continue sur E

ii. f est continue en 0

iii. f est lipschitzienne

iv. f est bornée sur la boule unité fermée

v. f est bornée sur la sphère unité

vi. $\exists\, k \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$

Il n'est pas nécessaire de toutes les retenir : les plus importantes sont *i* et *vi*. Il faut aussi savoir que toute application linéaire continue est forcément lipschitzienne. Il faut aussi retenir l'idée générale de la démonstration qui est de se ramener à des vecteurs de norme 1 par homogénéité des applications linéaires.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors f est continue.

Démonstration.

Exemples importants d'applications linéaires continues en dimension finie

La trace, le produit matriciel, la conjugaison matricielle, sont continues.

Etude d'un exemple en dimension infinie

VIII.2 Norme triple d'une application linéaire continue

l'espace $\mathcal{L}_C(E, F)$

On note $\mathcal{L}_C(E, F)$ l'ensemble des application linéaire **continues** de E dans F. Il est immédiat que c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ (et qu'il lui est égal si E est de dimension finie)

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On pose $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.
Alors on a aussi

$$|||f||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

De plus f est $|||f|||$ lipschitzienne.

$|||f|||$ est appelé norme triple de f, ou norme d'opérateur de f.

Proposition

$|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

De plus, pour tout $f, g \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $|||f \circ g||| \leqslant |||f|||\,|||g|||$, et $|||\mathrm{id}||| = 1$.
(on dit que $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre)

Voici deux exemples de calcul de norme triple (en dimension finie ou infinie).

VIII.3 Continuité des applications multilinéaires

Proposition

Soient $E_1, ..., E_n$ et G des ensembles munis de normes. Soit B une application linéaire définie ainsi :

$$B : \left| \begin{array}{lcl} E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & G \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & B(x_1, ..., x_n) \end{array} \right.$$

Alors il est équivalent de dire :

i. B est continue

ii. il existe $K > 0$ tel que pour tout $(x_1, ..., x_n)$, $\|B(x_1, ..., x_n)\| \leqslant K\|x_1\| \times \cdots \times \|x_n\|$

La démonstration est essentiellement analogue à celle du cas linéaire et n'est pas détaillée.

Corollaire

Si les E_i sont de dimensions finies, alors B est continue.

Exemple. L'application determinant est continue (comme fonction de ses colonnes). On en déduit l'existence d'une constante C telle que :

Si la norme sur E provient d'un produit scalaire, alors le produit scalaire est une application continue.

Le produit matriciel est continu.

IX Compacité

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Soit A une partie de E. On dit que A est compacte toute suite de A possède une valeur d'adhérence dans A.

La compacité permet la traduction dans les espaces normés du théorème de Bolzano-Weierstrass (rappelons que ce théorème n'est pas vrai en toute généralité dasn un EVN).

IX.1 Propriétés générales

Proposition

Tout compact est fermé et borné.

Proposition (fermés d'un compact)

Soit K un compact. Soit $F \subset K$ un fermé. Alors F est compact.

Proposition (produit de compacts)

Soient $K_1, ..., K_p$ des compacts. Alors $K_1 \times \cdots \times K_p$ est compact.

La preuve de ce résultat est analogue à celle du théorème de Bolzano Weierstrass dans le cas des suites complexes (extractions successives).

Proposition (suites dans un compact)

Soit K un compact. Soit (u_n) une suite de K.
La suite (u_n) converge si et seulement si elle n'a qu'une valeur d'adhérence.

La preuve de ce résultat est analogue à celle faite dans le cas des suites réelles bornées et ne sera pas reprise.

IX.2 Compacité d'un EVN de dimension finie

En dimension finie, on a l'important résultat suivant :

Théorème

Soit E un espace-vectoriel normé de dimension finie. Soit $K \subset E$. Alors K est compact si et seulement si K est fermé et borné.

IX.3 Exemples

Les segments, les unions finies de segments, l'ensemble de Cantor, sont des compacts de $\mathbb{R}$.

$D = \{(x, y)x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$ est un compact du plan.

Dans $\mathbb{K}^n$, les boules fermées et les sphères sont des compacts.

Dans $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. En dimension infinie, il faut faire attention .
Dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\left\|\sum a_k X^k\right\| = \sup |a_k|$, la sphere unité est fermée bornée mais n'est pas compacte !

IX.4 Compacité et continuité

Les deux théorèmes de cette sections sont très importants et justifient l'importance de la compacité.

Théorème

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Démonstration.

Corollaire (bornes atteintes)

Soit (E,d) un EVN et K un compact de E. Soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists\, x_0 \in K,\ f(x_0) = \sup f(x) = \max f(x)$$

$$\exists\, x_1 \in K,\ f(x_1) = \inf f(x) = \min f(x)$$

Théorème (Heine)

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

IX.5 Exemples d'application

Les théorèmes précédents sont très utilisés, en particulier pour montrer l'existence d'objets mathématiques. En voici quelques illustrations.

Proposition

Soient f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(x) < 1$. Montrer qu'il exisste un réel $a < 1$ tel que $f(x) \leq a$ pour tout x. Ceci serait il vrai si on remplace $[0,1]$ par $[0,1[$?

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$, et de limites finies en $\pm\infty$. Alors f est bornée.

Proposition

Soit F un fermé de E de dimension finie. Alors F admet un élément de norme minimale.

Définition

Soit E un espace de dimension finie. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est coercive lorsque $f(x)$ tend vers l'infini lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini.

Proposition

Toute fonction coercive continue sur E admet un minimum.

Proposition

Soit K_1 et K_2 deux compacts disjoints. Alors il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$.

Proposition

En dimension finie, les constantes de comparaison de normes sont atteintes. La norme triple d'une application continue est atteinte.

X Connexité par arcs

X.1 Definitions

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé et A est une partie de E.

Définition

Soit A une partie de E et $(a,b) \in A^2$. On appelle arc reliant a et b toute application continue $\phi : [0,1] \longrightarrow A$ telle que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$.

Illustration géométrique

Définition

On dit que A est connexe par arcs (en abrégé CPA) lorsque :

$$\forall\,(a,b) \in E^2, \;\; \text{il existe un arc } \phi \text{ d'extrémités } a \text{ et } b$$

Illustration géométrique

Exemples
E et $\emptyset$ sont connexes par arcs.

Dans un EVN quelconque, les parties convexes sont connexes par arcs (la réciproque est fausse).

(Important) Dans $\mathbb{R}$, les parties connexes par arcs sont les intervalles.

Deux exemples de parties connexes par arcs et non convexes : $\mathbb{C}^*$ et les ensembles étoilés.

X.2 Connexité par arcs et continuité

Théorème

L'image d'un connexe par arcs par un application continue est connexe par arcs.

Démonstration.

Remarque. Il s'agit d'une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires. Ce théorème permet surtout de démontrer des résultats de non existence de certains objets.

Exemples d'utilisation :

-Le complémentaire d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ n'est pas connexe par arcs.

-$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

- Montrer que $\mathbb{U}$ et $[0,1]$ ne sont pas homéomorphes.

Proposition

Soit f une application continue sur une partie connexe par arcs et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Alors f est constante.

Exemple. Le rang n'est pas une application continue.