Suites et séries de fonctions

Le but de ce chapitre est de trouver des conditions suffisantes pour intervertir divers symboles mathématiques
Prenons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Pour $a \in \bar{I}$, sous quelles conditions peut on dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$?
De même, quand peut-on affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$? C'est à ce type d'interrogations que nous tenterons de répondre.

Suites de fonctions

I Différents modes de convergence

Dans tout ce chapitre, on se donne :
- un intervalle I de $\mathbb{R}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n : x \in I \longmapsto f_n(x)$.

On se propose d'étudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.

I.1 Convergence simple (CVS)

Définition

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers f sur I lorsque pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Dans ce cas, on notera $(f_n)_n$ CVS vers f, ou $f_n \xrightarrow{\text{CVS}} f$.

I.1.1 Exemples et méthode pratique

Pour montrer la convergence simple d'une suite de fonctions sur un intervalle I :
1) On fixe x_0 dans I (quelconque mais fixé).

On étudie la suite numérique $f_n(x_0)$. Si cette suite converge, la limite est par définition $f(x_0)$ où f est la **limite simple** de la suite (f_n).

$f_n : x \longmapsto x^n$ définie sur $I = [0,1]$.

$f_n : x \longmapsto n^3 x \exp(-nx^2)$ définie sur $I = \mathbb{R}$.

I.2 Insuffisance de la convergence simple

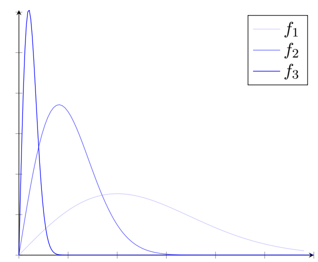
Reprenons notre premier exemple : On a convergence simple de la suite (f_n) vers 0 sur l'intervalle $[0,1[$.
Néanmoins si on pose $x_n = 1 - 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\lim f_n(x_n) = 1/e \neq 0$.

On constate aussi que la limite de la suite f_n n'est pas continue alors que chaque f_n l'était.

Reprenons maintenant notre deuxième exemple $f_n : x \longmapsto n^3 x \exp(-nx^2)$ sur $I = [0,1]$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ Cependant :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 n^3 x \exp\left(-nx^2\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{u=\sqrt{n}x}{=} n^2 \int_0^{\sqrt{n}} u \exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty
\end{aligned}$$

Comment ceci est il possible ?
Le graphe des fonctions (f_n) permet de comprendre : on est confronté à un phénomène de "bosse glissante" :



La notion de convergence simple **ne permet pas de transmettre à la limite l**es propriétés intéressantes d'une suite de fonctions. Pour cette raison, on introduit une nouvelle notion de convergence.

I.3 Convergence uniforme (CVU)

Définition

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* vers f sur I si :

— $f_n - f$ est bornée sur I (i.e. $\|f_n - f\|_{\infty,I}$ existe)
— $\|f_n - f\|_{\infty,I} \longrightarrow 0$.

Dans ce cas on notera $(f_n)_n$ CVU vers f, ou $f_n \xrightarrow{\text{CVU}} f$.

Lien entre les deux notions :

— La convergence uniforme implique la convergence simple :

$$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,I} \longrightarrow 0$$

— Ecritures quantifiées des deux modes de convergence :

$$(f_n) \text{ CVS vers } f \text{ sur } I \iff \forall x \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

$$(f_n) \text{ CVU vers } f \text{ sur } I \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall x \in I,\ \forall n > n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

— La convergence simple, **n'implique pas** la convergence uniforme : par exmple pour $n \in \mathbb{N}$, prenons $f_n : x \in [0,1[\longmapsto x^n$. (f_n) CVS vers la fonction nulle sur $[0,1[$ mais $\|f_n - f\|_{\infty,I} = 1 \not\longrightarrow 0$.

Conséquence pratique On commence toujours par montrer la convergence simple, ce qui fournit la (seule) limite (possilbe) f. Une fois f connue, on peut étudier la convergence uniforme.

I.3.1 Intéprétation géométrique :

$$\|f_n - f\|_{\infty,I} \leqslant \epsilon \iff \forall x \in I, f(x) - \epsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \epsilon$$

On obtient un encadrement de f qui est valable sur la totalité de l'intervalle :

I.3.2 Interprétation topologique :

On note $E = B(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. E peut être muni de la norme infinie. Soit (f_n) une suite de E.

$$(f_n) \text{ CVU vers } f \text{ sur } I \iff f_n \longrightarrow f \text{ dans } (E, \|\cdot\|_\infty)$$

I.4 Techniques d'études de la convergence uniforme

On suppose dans toute cette partie que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f.

• Méthode 1 : l'étude des variations

On calcule $\|f_n - f\|_{\infty,I}$ en étudiant les variations de $f_n - f$.

Exemple. On se place sur $I = \mathbb{R}_+$, on fixe $a > 0$ et on s'intéresse à la suite (f_n) avec :

$$f_n : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{a^n x}{1 + n a^n x^2} \end{array} \right.$$

• Méthode 2 : Celle que l'on favorisera

Proposition

Supposons qu'il existe $(\alpha_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

i. $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ (1)
ii. $\alpha_n \longrightarrow 0$

Alors $(f_n)_n$ CVU vers f sur I.

L'idée est de chercher un majorant uniforme de $f_n - f$ sans déterminer explicitement la norme infinie. Cette méthode est beaucoup plus souple.
On dira que $(\alpha_n)_n$ est un *majorant uniforme de $f_n - f$*.

Reprenons le même exemple :

• Méthode 3 : Utilisation d'une suite particulière

Proposition

(f_n) CVU vers f sur I si et seulement si $\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, $\lim f_n(x_n) - f(x_n) = 0$.

On utilise principalement ce résultat sous sa forme contraposée :

Proposition

Pour avoir non convergence uniforme, il suffit (et il faut) de trouver une suite (x_n) telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.

Exemple.

I.5 Influence de l'intervalle

Propriétés locales ou propriétés globales ?
Considérons une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il est équivalent de dire :

— f est continue sur $\mathbb{R}$
— f est continue sur $[a, b]$ pour tout a et b réels
— f est continue en x pour tout x réel.

On dit que la continuité est une propriété locale : elle est vérifiée sur tout l'intervalle si et seulement si elle est vérifiée en chaque point.

Néanmoins,

$$f \text{ uniformément continue sur } \mathbb{R} \;\not\Leftrightarrow\; \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ f \text{ uniformément continue sur } [a, b]$$

La continuité uniforme est une propriété globale, elle dépend non seulement de f mais aussi de l'intervalle sur lequel on l'étudie.
On a la même différence entre la convergence simple et la convergence uniforme :

$$(f_n) \text{ CVU vers } f \text{ sur } I \;\not\Leftrightarrow\; \forall [a, b] \subset I,\ (f_n) \text{ CVU vers } f \text{ sur } [a, b]$$

par exemple :

Ainsi dans la pratique il est très important de contrôler l'intervalle sur lequel on fait l'étude. Il faut très vigilant lorsqu'on veut agrandir l'intervalle de convergence.

Signalons en particulier **qu'il est faux de dire** :

— la CVU sur $[A, +\infty[$ pour tout $A > 0$ $\not\Rightarrow$ implique CVU sur $]0, +\infty[$
— la CVU sur $[A, B]$ pour tout $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \not\Rightarrow$ implique CVU sur $\mathbb{R}$

POur cette raison, on introduit la notion suivante :

I.6 Convergence uniforme locale (ou sur tout segment)

Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions sur I qui CVS vers f. On dit que la convergence est localement uniforme lorsque :

$$\forall x \in I,\ \exists V_x \text{ un voisinage fermé de } x,\ (f_n) \text{ CVU vers } f \text{ sur } V_x$$

En pratique, les voisinages choisis seront des segments. On parle de convergence uniforme sur tout segment, ou bien sur tout compact.

Exemple.

• Sur $I = [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \text{Montrer la CVU locale} &\iff \text{Montrer la CVU sur tout } [a, b],\ 0 \leqslant a < b \\ &\iff \text{Montrer la CVU sur tout } [0, b],\ b > 0 \end{aligned}$$

• Sur $I =]0, +\infty[$,

$$\text{Montrer la CVU locale} \iff \text{Montrer la CVU sur tout } [a, b],\ 0 < a < b$$

Dans les exemples précédents, sur quels intervalles a t'on convergence uniforme locale ?

I.7 Opérations et convergence uniforme

• Linéarité :

$$\left.\begin{array}{r}(f_n) \text{ CVU vers } f \\ (g_n) \text{ CVU vers } g\end{array}\right| \Longrightarrow (f_n + \lambda g_n) \text{ CVU vers } f + \lambda g$$

• Autres opérations :
La CVU se comportant mal par produits et composées, nous serons contraints de traiter chaque situation à la main.
En particulier, signalons que (f_n) CVU vers f et (g_n) CVU vers g n'implique pas que le produit $f_n g_n$ CVU vers fg.

Exemple. $f_n(x) = g_n(x) = x + {}^1/_n$

I.8 Extension de définition aux fonctions définies sur les EVN

On considère E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soit A une partie de E. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \longrightarrow F$.
On généralise alors sans difficulté les définitions de convergence simple et de convergence uniforme :

— CVS : $\forall x \in A$, $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$

— CVU : $\|f_n - f\|_{\infty,A} = \sup\limits_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|_F \longrightarrow 0$

Dans ces définitions, on a juste remplacé la valeur abslue par une norme. Notons que, comme toutes les normes sont équivalentes sur les espaces de dimension finie , la convergence uniforme ne dépend pas des normes choisie.

Tous les résultats précédents restent vrais.

II Les théorèmes de passage à la limite

Les théorèmes de cette section justifient l'importance de la convergence uniforme.

II.1 Le théorème de continuité

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. On suppose que :

i. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I (resp en x_0)
ii. (f_n) CVU vers f sur tout segment de I (resp sur un voisinage de x_0)

Alors f est continue sur I (resp en x_0)

Démonstration

La démonstration de ce théorème doit être connue.

Commentaires :
a) Ce résultat s'utilise fréquemment sous sa forme contraposée : si une suite de fonctions continues (f_n) CVS vers f discontinue en un point x_0, alors il n'y a CVU sur aucun voisinage de x_0.

b) La réciproque est fausse : la limite f peut être continue sans que la convergence soit uniforme

Interprétation topologique : On considère l' espace vectoriel $E = B([a,b], \mathbb{R})$ et des fonctions bornées et le sous-espace $F = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions continues, Le théorème de continuité traduit que F est **fermé** dans E (nous verrons en fait mieux plus tard : F est un espace vectoriel normé complet)

II.2 Théorème d'intégration sur un segment

Théorème

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose que (f_n) CVU vers f sur $[a,b]$ tout entier. Alors :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Exemple :
Trouver la limite de $\int_0^1 e^{-nx} f(x)dx$ pour f continue.

Commentaires :

Ce résultat est encore vérifié lorsque les f_n sont continues par morceaux, en rajoutant l'hypothèse f continue par morceaux pour rester dans le cadre du programme.

Importance de l'intervalle compact. Ce théorème suppose que l'intervalle est un segment : en particulier il n'est pas valable pour les intégrales impropres.

Interprétation topologique.
Munissons l'espace $F = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ des normes usuelles 1 et infinie. Ce théorème s'énonce alors de deux facons possibles en termes topologiques :
Premier énoncé :

La convergence uniforme implique la convergence en moyenne

Ce qui exprime que la norme infinie est plus fine que la norme 1.

Second énoncé :

La forme linéaire $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est continue pour la norme infinie.

II.3 Théorème de dérivation

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I un intervalle. On suppose :

i. f_n $\mathcal{C}^1$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$
ii. (f_n) CVS vers f sur I
iii. (f_n') CVU vers g sur I ou sur tout segment de I

Alors,

i. f est $\mathcal{C}^1$ sur I
ii. $f' = g$
iii. De plus on obtient l'information suivante : (f_n) CVU vers f sur tout segment de I

Démonstration

Commentaire sur les hypothèses :

L'hypothèse (ii) peut en fait être affaiblie en $(\exists\, x_0 \in I,\ (f_n(x_0))$ converge).

L'hypothèse forte est (iii) et **porte sur le comportement de** (f_n'). la suite (f_n) ne joue pas le premier rôle dans ce théorème.

Exemple. Que dire de (f_n) définie sur $]0,\infty[$ vérifiant les propriétés suivantes ?

i. $f_n(1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
ii. $f_n'(x) = \dfrac{n}{1+nx^2}$

Le théorème précédent se généralise pour des fonctions $\mathcal{C}^k$.

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions sur I. On suppose :

i. f_n $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$
ii. $(f_n^{(j)})$ CVS vers g_j sur I pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$
iii. $(f_n^{(k)})$ CVU vers g_k sur I ou sur tout segment de I

Alors,

i. $f = g_0$ est $\mathcal{C}^k$ sur I
ii. $f^{(j)} = g_j$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$
iii. Toutes les convergences sont uniformes sur les segments

Remarque : pour la classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre en pratique que toutes les $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément.

Commentaire sur les hypothèses :

La encore , l'hypothèse forte porte sur la dérivée : il faut retenir l'idée générale suivante : on peut "remonter" la convergence uniforme d'une dérivée. (c'est une propriété d'intégration en réalité)

En revanche, **la convergence uniforme ne se dérive pas :**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions C^∞ qui converge uniformément vers f sur I alors on peut seuelement dire que f est **continue** par le théorème de continuité.

L'exemple $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$ illustre cette situation.

II.4 Théorème de double limite

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $I = [a, b[$. (b est fini ou infini)
On suppose que :

i. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n(x)$ a une limite ℓ_n quand x tend vers b
ii. (f_n) CVU vers f <u>sur un voisinage de b</u>

Alors,

i. (ℓ_n) converge (vers ℓ)
ii. $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers b

Ce théorème est admis.

La conclusion peut aussi s'écrire

$$\lim_{x\to b}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to b} f_n(x)\right)$$

ce qui explique le nom de ce théorème.

Il est lui-aussi souvent utilisé sous sa forme contraposée pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme au voisinage de la borme ouverte b.

Exemple. Posons $f_n(x) = \mathrm{Arctan}(x/n)$. Etudier la convergence uniforme sur les segment de $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{R}$.

III Les théorèmes d'approximation uniforme

Dans cette partie on énonce deux théorèmes permettant d'approcher uniformément une fonction donnée f par des fonctions plus "simples".Cette méthode d'approximation peut parfois permettre de démontrer des résultats généraux, en se contentant de les prouver pour les fonctions "simples". Nous en verrons quelques exemples. Elle possède également des applications pour les approximations numériaues

III.1 Approximation uniforme par les fonctions en escaliers

Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}([a,b],E)$ avec E de dimension finie. Il existe une suite $(f_n) \in \mathcal{E}sc([a,b],E)^{\mathbb{N}}$ qui CVU vers f sur $[a,b]$.

Démonstration

Ce théorème a déjà été vu en première année et est à la base de la définition de l'intégrale de Riemann : revoyns rapidement la preuve.

III.2 Théorème d'approximation de Weierstrass

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Il existe (P_n) une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$ qui CVU vers f sur $[a,b]$.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible. Elle est fournie en annexe de ce chapitre.

III.3 Un exemple d'application : le lemme de Riemann Lebesgue

Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{K})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t = 0$$

Nous donnons deux preuves. Chacune utilisant un théorème d'approximation.

Séries de fonctions

Cette seconde partie traite de l'étude des séries de fonctions. Beaucoup de notions seront similaires à celles introduites dans la partie précédente. En particulier, on retrouvera la convergence simple et uniforme, et un nouveau mode propre aux séries apparaitra. Il convient donc de ne pas confondre ces différentes notions, et de bien faire la distinction entre l'étude des suites de fonctions et celle des séries de fonctions.

IV Différents modes de convergence

IV.1 Convergence simple

Dans tout ce chapitre, on se donne :

— un intervalle I de $\mathbb{R}$
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $u_n : x \in I \longmapsto u_n(x)$.

On se propose d'étudier la fonction qui à x associe la série de terme général $u_n(x)$.

Définition

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge *simplement* sur I lorsque pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge. Dans ce cas, on notera $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVS.

Exemples
- La série géométrique : $u_n(x) = x^n$.

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge simplement sur }]-1,1[.$$

-La série exponentielle. $v_n(x) = \frac{x^n}{n!}$,

$$\sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ CVS sur } \mathbb{R}.$$

Remarques :

Etudier la convergence simple, c'est <u>déterminer le domaine de définition de</u> $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
.
Notons que la convergence simple de la **série** n'est rien d'autre que la convergence simple de la **suite** des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.

Exemple : Trouver le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+nx^{2n}}$

IV.2 Convergence uniforme

Définition

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série simplement convergente sur I. Soient $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.
On dit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge *uniformément* sur I lorsque la suite (S_n) CVU vers S sur I.

La propriété suivante fournit une autre façon de voir cette définition.

Proposition (Caractérisation par les restes)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions simplement convergente. On pose :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

Alors $\sum u_n$ CVU sur I si et seulement si (R_n) CVU vers $\tilde{0}$ sur I.

La propriété suivante nous fournit une condition nécessaire de convergence uniforme.

Proposition

Si $\sum u_n$ CVU, alors (u_n) CVU vers $\tilde{0}$.

Tout comme cette condition n'était pas suffisante pour les séries numériques, elle ne l'est pas pour les séries de fonctions.

Remarque :
On a également pour les séries de fonctions une équivalence suite-série.
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. Il est équivalent de dire :

i. la suite (f_n) CVU sur I
ii. la série $\sum_{n\geqslant 1} (f_n - f_{n-1})$ CVU sur I

La convergence uniforme est souvent plus délicate à montrer pour les séries que pour les suites : en effet, **on ne connait pas en général le reste d'ordre** n qui est la fonction à majorer. Ceci rend nécessaire l'introduction d'un nouveau mode de convergence spécifique aux séries.

IV.3 Convergence normale

Définition

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur I. On dit que $\sum u_n$ converge *normalement* sur I lorsque :

i. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_{\infty,I}$ existe

ii. $\sum \|u_n\|_{\infty,I}$ converge

Dans ce cas, on notera $\sum u_n$ CVN sur I.

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série normalement convergente sur I. Alors :

— $\sum u_n$ converge simplement absolument sur I
— $\sum u_n$ converge uniformément sur I

Démonstration :

Deux remarques :
- La convergence uniforme n'implique pas la convergence normale. :

Prenons $u_n(x) = {}^1\!/_x \mathbb{1}_{]n,n+1]}(x)$.

-La convergence normale est, comme la convergence uniforme, une notion globale : Il faut donc faire attention à l'intervalle : Il peut y avoir convergence normale sur les segment de I mais pas sur I tout entier.

Prenons par exemple la série exponentielle.

IV.4 Méthode pratique d'étude

Méthode

Pour une étude de série de fonctions, on procède toujours ainsi :

i. On étudie la CVS, ce qui détermine l'intervalle d'étude I.

ii. On teste la CVN sur I.

iii. S'il n'y a pas CVN sur I, on regarde la CVN sur ses sous-intervalles (souvent les segments).

iv. Là où il n'y a pas CVN, on teste la CVU en majorant le reste de la série.

L'étude de la CVU sera utile notamment pour les séries alternées, dont on dispose d'une majoration simple du reste. On pourra également utiliser la comparaison série intégrale dans certains cas.

IV.5 Exemples

Commençons par les deux séries de références (géométrique, exponentielle).

- La série géométrique : $u_n(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
  — $\sum u_n$ CVS sur $]-1,1[$.
  — $\sum u_n$ CVN sur $[-a,a]$ pour tout $a < 1$.
  — $\sum u_n$ ne CVU pas sur $]-1,1[$.

- La série exponentielle : $u_n(z) = {}^{z^n}\!/_{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$
  — $\sum u_n$ CVS sur $\mathbb{C}$.
  — $\sum u_n$ CVN sur tout compact de $\mathbb{C}$.
  — $\sum u_n$ ne CVU pas sur $\mathbb{C}$.

- Exemple 1 : $u_n(x) = \frac{x}{1+e^{nx}}$ pour $n \geqslant 0$.

- Exemple 2 : $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour $n \geqslant 1$.

V Les théorèmes

Les quatre théorèmes utilisés pour les suites vont être traduits pour les séries.

Important : ces théorèmes seront utilisés constamment en analyse.
Il faut connaître leurs hypothèses à la perfection.

V.1 Le théorème de continuité

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur I. On suppose que :

i. u_n continue sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$

ii. $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I

Alors, en posant $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ on a f continue sur I.

Par exemple, la fonction exponentielle est continue!! Montrons le :

V.2 Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$. On suppose :

i. u_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$

ii. $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

Alors la série numérique $\sum \int_a^b u_n(t)\,dt$ est convergente et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : il est recommandé de connaitre cette preuve.

Exemple

Ce premier exemple est à considérer comme un modèle.

Montrer que la fonction $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+x)^2}$ est bien définie et calculer son intégrale sur $[0, 1]$.

V.3 Théorème de dérivation terme à terme

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur I. On suppose :

i. u_n est $\mathcal{C}^1$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$

ii. $\sum u_n$ CVS sur I

iii. $\sum u_n'$ CVU sur tout segment de I

Alors :

i. $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est $\mathcal{C}^1$

ii. $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$

iii. $\sum u_n$ CVU sur tout segment de I

Démonstration

Exemple. Les théorèmes d'interversion permettent de calculer la somme de nombreuses séries à l'aide des séries de références. En voici deux exemples élémentaires :

-Dérivation de l'exponentielle.

-La série logarithme.

Comme pour les suites, le théorème de dérivation s'étère : voici les hypothèses.

Théorème (Version itérée)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur I. On suppose :

i. u_n est $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$

ii. $\sum u_n^{(j)}$ CVS sur I pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$

iii. $\sum u_n^{(k)}$ CVU sur tout segment de I

Alors :

i. $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est $\mathcal{C}^k$

ii. $f^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$

iii. $\sum u_n^{(j)}$ CVU sur tout segment de I pour $j \in [\![0, k]\!]$

Pour la version C^∞ on montre en pratique la convergence uniforme de toutes les dérivées.

V.4 Théorème de double limite pour les séries

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur $I = [a, b[$. On suppose que :

i. $u_n(x) \xrightarrow[x \to b]{} \alpha_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

ii. $\sum u_n$ CVU sur un voisinage de b

Alors :

i. $\sum \alpha_n$ converge

ii. $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = \lim_{x \to b} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

Démonstration :

Exemple. Nous avons établi :

$$\forall\, x \in]-1, 1[,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Montrons qu'on peut faire tendre x vers -1 pour obtenir la somme de la série harmonique alternée. On pose $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Faisons la liste des choses à prouver pour appliquer le théorème ci dessus :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2}$$

VI Un exemple de référence : la fonction zêta de Riemann

Pour terminer ce chapitre, faisons l'étude complète d'un exemple célèbre.

VI.1 Définition

Pour $x > 1$, on pose :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^x}}_{u_n(x)}$$

Vérifions que cette série est bien convergente (simplement).
On notera $\mathcal{D} =]1, +\infty[$ son domaine de définition réel. On pourrait toutefois également étudier zêta sur le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re(z) > 1\}$.

VI.2 Régularité et Variations

VI.3 Etude au voisinage de 1 et de l'infini.

VI.4 La série de Riemann alternée

VII Annexe

VII.1 Preuve du théorème de Weiestrass

Théorème

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Il existe $(\tilde{P}_n)$ une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$ qui CVU vers f sur $[a,b]$.

On peut se contenter de montrer le théorème pour $[a,b] = [0,1]$. En effet, si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$, on pose :

$$g : \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{K} \\ \quad x \longmapsto f(a + (b-a)x) \end{array} \right.$$

Si $(\tilde{Q}_n)$ CVU vers g sur $[0,1]$, la suite de fonctions polynômiales associée à la suite de polynômes $(P_n) = \left(Q_n\left(\frac{X-a}{b-a}\right)\right)$ CVU vers f sur $[a,b]$.

Démonstration

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction polynômiale de Bernstein :

$$B_n(f) : \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{K} \\ \quad x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{array} \right.$$

Soit $\epsilon > 0$, par Heine f est uniformément continue sur $[0,1]$, on prend donc $\eta > 0$ qui vérifie $|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$. Le but est de majorer $|f(x) - B_n(f)(x)|$.

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

On note $I_1 = \{k \in [\![0,n]\!],\ |k/n - x| \geqslant \eta\}$ et $I_2 = \{k \in [\![0,n]\!],\ |k/n - x| < \eta\}$. Alors,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \underbrace{\sum_{k \in I_1}\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{A(x)} + \epsilon$$

Majorons $A(x)$:

$$A(x) \leqslant 2\|f\|_{\infty,[0,1]} \sum_{k \in I_1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

On introduit maintenant la variable aléatoire $S_{n,x}$ qui suit la loi binomiale $B(n,x)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_{n,x}}{n}\right| \geqslant \eta\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\eta^2}\mathbb{V}\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n\eta^2} \end{aligned}$$

La première inégalité résultant de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire $S_{n,x}/n$. On a réussi a majorer $A(x)$ indépendamment de x, d'où l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N$, pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant 2\epsilon$. Ceci prouve que $(B_n(f))$ CVU vers f sur $[0,1]$.

Remarquons l'importance de la compacité : si l'on ne se place plus sur un segment, le théorème n'est plus vérifié. Par exemple, si f est limite uniforme d'une suite $(\tilde{P}_n)$ de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$, alors f est polynomiale. Montrons-le : prenons $\epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geqslant N$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|\tilde{P}_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$. Pour $n, p \geqslant N$, $|\tilde{P}_n(x) - \tilde{P}_p(x)| \leqslant 2\epsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\tilde{P}_n - \tilde{P}_p$ est une fonction polynomiale bornée, elle est donc constante. Alors pour $n \geqslant N$, $\deg P_n = \deg P_N$, donc $P_n \in \mathbb{R}_N[X]$ qui est fermé. (P_n) converge dans $\mathbb{R}_N[X]$, et f est polynomiale. Toutefois, on montre facilement que pour toute fonction f continue, on peut trouver une suite $(\tilde{P}_n)$ de fonctions polynomiales qui CVU vers f sur tout segment.

VII.2 Théorème de Weierstrass trigonométrique

Définition

On appelle polynôme trigonométrique (PT) toute fonction :

$$P : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \ t \longmapsto P(t) \end{array} \right.$$

telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et une famille de complexes $(c_n) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tels que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

La famille $(t \longmapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ étant libre, on a unicité des (c_n) pour un PT. Soulignons que l'ensemble des PT forment une $\mathbb{C}$-algèbre.

Proposition

Tout polynôme trigonométrique peut s'écrire :

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

On a alors $a_n = (c_n + c_{-n})$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ pour $n \in [\![0,N]\!]$.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\tilde{P} \circ \cos$ et $\tilde{P} \circ \sin$ sont des PT.

Théorème de Weierstrass trigonométrique

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue 2π-périodique. Il existe une suite de PT qui converge uniformément vers f.

Lemme 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue 2π-périodique paire. Alors il existe $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = g(\cos t)$.

Preuve : En posant $g(t) = f(\operatorname{Arccos} t)$ pour $t \in [-1, 1]$, on obtient bien les propriétés attendues.

Lemme 2

Soit f continue 2π-périodique impaire. On suppose que f est dérivable en 0 et en π. Alors il existe $h : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = (\sin t)h(\cos t)$.

Preuve : On pose,

$$\forall\, t \in]0, \pi[,\ \tilde{f}(t) = \frac{f(t)}{\sin t}$$

On vérifie aisément que $\tilde{f}$ est prolongeable sur $\mathbb{R}$, continue, 2π-périodique et paire. Le Lemme 1 conclut.

Lemme 3

Soit f 2π-périodique continue et impaire. Alors il existe f_ϵ qui vérifie les mêmes propriétés que f mais qui est en plus dérivable en 0 et en π avec $\|f_\epsilon - f\|_\infty \leqslant \epsilon$.

Preuve : On le voit sur un dessin.

Démonstration de Weierstrass trigonométrique

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{f_p \text{ paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{f_i \text{ impaire}}$$

Soit $\epsilon > 0$, par le lemme 3, il existe une fonction $f_{i,\epsilon}$ dérivable en 0 et en π vérifiant $\|f_i - f_{i,\epsilon}\|_\infty \leqslant \epsilon$. On emploie les fonctions g et h respectivement associées à f_p et à $f_{i,\epsilon}$ fournies par les lemmes 1 et 2. Par Weierstrass, il existe $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|Q_1 - g\|_\infty \leqslant \epsilon$ et il existe $Q_2 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|Q_2 - h\|_\infty \leqslant \epsilon$. Posons $P(t) = Q_1(\cos t) + (\sin t)Q_2(\cos t)$.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad & |P(x) - f(x)| \\ & \leqslant |g(\cos x) - Q_1(\cos x)| + |f_i(x) - f_{i\epsilon}(x)| + |\sin x||h(\cos x) - Q_2(\cos x)| \\ & \leqslant \|g - Q_1\|_\infty + \|h - Q_2\|_\infty + \|f_i - f_{i,\epsilon}\|_\infty \leqslant 3\epsilon \end{aligned}$$

Ainsi P approche f, et c'est bien un polynôme trigonométrique par les propriétés de cette algèbre.

Produit de convolution

Définition

Soient f continue sur I et g continue sur $\mathbb{R}$. On note $f * g$ le produit de convolution de f et de g, avec :

$$f * g : x \longmapsto \int_I f(t)g(x - t)\,\mathrm{d}t$$

Le domaine de définition de cette fonction dépend des propriétés de f et de g. Si I est un segment, $f * g$ est définie sur I. Si $I = \mathbb{R}$ avec f intégrable et g bornée, alors $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$. Nous allons restreindre notre étude au cas f continue sur $\mathbb{R}$, de support $[-1, 1]$. Ainsi on aura :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \int_{-1}^{1} f(t)g(x - t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition

Par le changement de variable $u = x - t$, on montre que le produit de convolution est commutatif. Il est également associatif.

Définition (approximation de l'unité)

On appelle approximation de l'unité toute suite (f_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

i. f_n admet $[-1, 1]$ comme support pour $n \in \mathbb{N}$
ii. f_n est positive pour $n \in \mathbb{N}$
iii. (f_n) CVU vers $\tilde{0}$ sur $[-1, -\epsilon]$ et sur $[\epsilon, 1]$ pour tout $\epsilon > 0$
iv. $\int_{-1}^{1} f_n = 1$

Exemple. La suite (f_n) définie ci-dessous est une approximation de l'unité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : x \longmapsto \frac{(1 - x^2)^n}{\int_{-1}^{1}(1 - t^2)^n\,\mathrm{d}t}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

Proposition

Si (f_n) est une approximation de l'unité, alors pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(f_n * g)$ CVU vers g sur tout segment.

Démonstration

Soient $A > 0$ et $x \in [-A, A] = J$. Il s'agit de majorer uniformément $|f_n * g(x) - g(x)|$.

$$|f_n * g(x) - g(x)| \leqslant \left|\int_{-1}^{1} f_n(t)(g(x - t) - g(x))\,\mathrm{d}t\right|$$

Soit $\eta \in]0,1[$. Découpons l'intégrale précédente et appliquons l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|f_n * g(x) - g(x)| &\leqslant \int_{-1}^{-\eta} f_n(t)|g(x-t)-g(x)|\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_{-\eta}^{\eta} f_n(t)|g(x-t)-g(x)|\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_{\eta}^{1} f_n(t)|g(x-t)-g(x)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Posons $M = \sup\limits_{[-A-1,A+1]} |g|$. Pour $t \in [-1,1]$, $|g(x-t)-g(x)| \leqslant 2M$. Soit $\epsilon > 0$, comme g est uniformément continue sur $[-A-1, A+1]$ par Heine, on peut choisir η tel que $|g(x-t)-g(x)| \leqslant \epsilon$ pour $|t| \leqslant \eta$. Ainsi :

$$\begin{aligned}|f_n * g(x) - g(x)| &\leqslant \epsilon \int_{-\eta}^{\eta} f_n(t)\,\mathrm{d}t + 2M\left(\int_{-1}^{-\eta} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\eta}^{1} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &\leqslant \epsilon + 2M\left(\int_{-1}^{-\eta} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\eta}^{1} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Comme (f_n) CVU vers $\tilde{0}$ sur $[-1,-\eta]$ et sur $[\eta,1]$, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\int_\eta^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$ et $\int_{-1}^{-\eta} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \epsilon$. Ceci montre que $(f_n * g)$ CVU vers g sur $[A, A]$.

Le produit de convolution est utilisé dans de nombreux domaines. On peut d'ailleurs s'en servir pour démontrer le théorème de Weierstrass sur un segment $[a,b]$. En effet, remarquons que l'approximation de l'unité (f_n) citée en exemple est une suite de fonctions polynomiales. À l'aide de raccordements par des fonctions affines et de changements de variables, on peut trouver $\tilde{g}$ qui coïncide avec la fonction g à approcher sur $[a,b]$, et telle que $(f_n * \tilde{g})$ soit également une suite de fonctions polynomiales. La convergence uniforme de $(f_n * \tilde{g})$ sur $[a,b]$ nous permet donc de conclure. Plus généralement, beaucoup d'équations physiques s'écrivent comme le produit de convolution d'un opérateur par une fonction décrivant le système.

Exponentielle de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On notera dans cette section :

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & t \longmapsto \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}\end{aligned}$$

Lemme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(B_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum B_n$ converge. Alors :

$$A\sum_{n=0}^{+\infty} B_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (A \cdot B_n)$$

<u>Preuve :</u> On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k$. D'une part,

$$AS_n = \sum_{k=0}^{n} (A\cdot B_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} (A \cdot B_k)$$

D'autre part,

$$AS_n = A\sum_{k=0}^{n} B_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} A\sum_{k=0}^{+\infty} B_k$$

Proposition

f est $\mathcal{C}^1$ (en fait $\mathcal{C}^\infty$) et $f'(t) = Af(t) = f(t)A$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Posons $u_n(t) = \frac{t^n A^n}{n!}$. $u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, et $\sum u_n$ CVS car CVABS par existence de $\exp(|t| \cdot |||A|||)$. Calculons $u_n'(t)$:

$$u_n'(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0\end{cases}$$

Or on peut majorer uniformément $u_n'(t)$ sur les segments $[-M, M]$:

$$|||u_n'(t)||| \leqslant \sup_{t\in[-M,M]} |||u_n'(t)||| \leqslant \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} |||A|||^n$$

D'où la convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment, donc la convergence uniforme sur tout segment. Le théorème de dérivation associé au lemme précédent nous permettent de conclure.

Est-il possible de généraliser la propriété précédente pour obtenir $(e^A)' = A'e^A$, avec A une application $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Posons $f = \exp \circ A$.

$$f(t) = \exp(A(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{A(t)^n}{n!}}_{u_n(t)}$$

Vérifions l'hypothèse forte du théorème de dérivation (les autres sont immédiates) :

$$\frac{\mathrm{d}A^n}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{k=1}^{n} A(t)\cdots \underbrace{A'(t)}_{k^{\text{ième}}\text{ position}}\cdots A(t) \qquad (1)$$

On étudie la CVN sur $[-M, M] \subset I$. Pour $t \in [-M, M]$, $\|\!|A(t)|\!\| \leqslant M_0$ et $\|\!|A'(t)|\!\| \leqslant M_1$. Ainsi :

$$\forall\, t \in [-M, M], \qquad \left|\!\left|\!\left| \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}A^n}{\mathrm{d}t}(t) \right|\!\right|\!\right| \leqslant \frac{n}{n!} M_1 M_0^{n-1}$$

Il y a bien CVN sur tout segment de I et par le théorème de dérivation f est $\mathcal{C}^1$ sur I. Toutefois, l'expression (1) n'est pas exploitable et ne permet pas de calculer $(e^A)'$ dans le cas général. On peut néanmoins conclure dans certains cas :

$$\boxed{(\forall\, t \in I,\ A(t)A'(t) = A'(t)A(t)) \Longrightarrow (\exp A)' = A' \exp(A)}$$

VIII Séries trigonométriques

VIII.1 Quelques intégrales de références

Il est utile de connaître les valeurs des quatre intégrales suivantes, ou m et n sont des entiers :

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \text{ ou } m = n = 0 \\ \pi & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{imt}e^{int}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq -n \\ 1 & \text{si } m = -n \end{cases}$$

VIII.2 Définitions et propriétés

Définition

On appelle série trigonométrique toute série de fonction de la forme :

$$f : x \longmapsto \alpha_0 + \sum_{n \geqslant 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

où $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Par les formules d'Euler, on a également :

$$f(x) = c_0 + \sum_{n \geqslant 1} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{a_0}{2} \\ \forall\, n > 0,\ c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$

L'étude de ces séries est extrêmement simplifiée lorsque $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. Nous commencerons par étudier ce cas.

Proposition

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. Soit f la fonction ci-dessous :

$$f : x \longmapsto \alpha_0 + \sum_{n \geqslant 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

Alors f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique.

Démonstration

Posons $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leqslant |a_n| + |b_n|$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Le théorème de continuité nous assure f continue, et la 2π-périodicité est évidente.

Proposition

Lorsque $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, les coefficients de la séries sont déterminés par f. Plus précisément :

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Avec les notations précédentes :

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Soit $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$f(t)\sin(kt) = \frac{u_0\sin(kt)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)sin(kt)$$

Or $|u_n(t)\sin(kt)| \leqslant \|u_n\|_\infty$, il y a donc toujours CVN sur $[0, 2\pi]$. On peut alors appliquer le théorème d'intégration :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\sin(kt)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} u_n(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t\right)\right]$$

On reconnait les intégrales de références précédemment citées, ce qui nous donne :

$$\int_0^{2\pi} u_n(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = b_n\pi\delta_{k,n}$$

On conclut alors :

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t$$

La valeur de b_k se calcule en remplaçant $\sin(kt)$ par $\cos(kt)$ dans les calculs.

La propriété précédente nous permet donc d'écrire, lorsque $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes :

$$\left(\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right) = 0\right) \quad \Longrightarrow \quad (\forall\, k \geqslant 0, \quad a_k = b_{k+1} = 0)$$

Proposition (Cas particulier de l'égalité de Parseval)

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de complexes qui convergent absolument. On pose :

$$f : x \longmapsto \alpha_0 + \sum_{n\geqslant 1}\left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right)$$

Alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Démonstration

Soit $t \in \mathbb{R}$. $|f(t)|^2 = \overline{f(t)}f(t) = f(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\overline{f(t)}e^{int}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \underbrace{\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}e^{int}\,\mathrm{d}t}_{\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t = 2\pi\overline{c_n}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est justifiée par le théorème d'intégration, puisque $\sum_{n\geqslant 0} c_n\overline{f(t)}e^{int}$ et $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}\overline{f(t)}e^{-int}$ convergent normalement sur $[0, 2\pi]$.

La condition $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument n'est pas suffisante pour dériver la série f. Une condition suffisante, facile à montrer grâce au théorème de dérivation, est $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ convergent absolument.

VIII.3 Illustration de la difficulté dans le cas général

Lorsqu'il n'y a pas convergence absolue des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$, l'étude de la série géométrique peut être très difficile. Prenons par exemple $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = 0$. En $x = 0$, la série associée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, alors qu'en $x = \pi$, il s'agit de la série harmonique qui diverge. Nous allons toutefois traiter un cas particulier.

Exemple. On s'intéresse à la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{inx}}{n}$. On note $F(x)$ sa somme en cas d'existence. Montrons les propriétés suivantes :

i. La série CVS sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$

ii. La série CVU sur les compacts de $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$

iii. $F(x) = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + i\frac{\pi - x}{2}$ pour $x \in]0, 2\pi[$

(i) Remarquons tout de suite qu'il est vain d'essayer de montrer la convergence normale, puisque $\left|\frac{e^{inx}}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Passons donc par une transformation d'Abel. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On pose $S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} e^{ikx}$.

$$\begin{aligned}F_{p,q}(x) = \sum_{n=p}^{q}\frac{e^{inx}}{n} &= \sum_{n=p}^{q}\frac{S_n(x) - S_{n-1}(x)}{n} \\ &= \frac{S_q(x)}{q} - \frac{S_{p-1}(x)}{p} + \sum_{n=p}^{q-1}\frac{S_n(x)}{n(n+1)}\end{aligned}$$

Pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ikx} \neq 1$, ainsi :

$$S_p(x) = e^{i\frac{px}{2}}\frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On pose maintenant $p = 1$, on a donc :

$$\sum_{n=1}^{q}\frac{e^{inx}}{n} = \underbrace{\frac{S_q(x)}{q}}_{A_q(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{q-1}\frac{S_n(x)}{n(n+1)}}_{B_n(x)}$$

Or $A_q(x)$ tend vers 0 lorsque q tend vers l'infini, et $B_n(x) = \mathcal{O}\left(n^{-2}\right)$. $S_q(x)$ a donc une limite finie lorsque q tend vers l'infini, ce qui montre la CVS sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

(ii) Pour montrer la CVU sur les compacts, on étudie le reste en faisant tendre q vers l'infini :

$$R_p(x) = -\frac{S_p(x)}{p+1} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{S_n(x)}{n(n+1)}$$

$$|R_p(x)| \leqslant \frac{2}{|1-e^{ix}|}\left(\frac{1}{p+1} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

Soit $a \in]0, 2\pi[$. Pour $x \in [a, 2\pi - a]$,

$$\left|\frac{2}{1-e^{ix}}\right| = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}$$

Ainsi,

$$|R_p(x)| \leqslant \frac{2}{\sin\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{p+1} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

On a donc bien la CVU sur les compacts de $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

(iii) Soit $\lambda \in [0, 1[$. Posons $F_\lambda(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{inx}}{n}$. Après une étude de fonction, on montre grâce au théorème de dérivation que F_λ est dérivable sur $]0, 2\pi[$. On obtient après calcul :

$$F_\lambda'(x) = \frac{i\lambda e^{ix}}{1-\lambda e^{ix}}$$

On peut alors écrire :

$$F_\lambda(x) = \int_\pi^x \frac{i\lambda e^{it}}{1-\lambda e^{it}}\,\mathrm{d}t + F_\lambda(\pi)$$

$F_\lambda(\pi)$ à déjà été déterminé dans ce chapitre donc :

$$F_\lambda(x) = \int_\pi^x \frac{i\lambda e^{it}}{1-\lambda e^{it}}\,\mathrm{d}t - \ln(1-\lambda)$$

On s'intéresse alors à $F_1(x)$. Une transformation d'Abel permet d'obtenir :

$$F_\lambda(x) \xrightarrow[\lambda\to 1]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}$$

Le théorème de convergence dominée, présenté dans un chapitre ultérieur, permet d'écrire :

$$\int_\pi^x \frac{i\lambda e^{it}}{1-\lambda e^{it}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to 1]{} \int_\pi^x \frac{ie^{it}}{1-e^{it}}\,\mathrm{d}t$$

Le calcul de cette dernière intégrale permet de conclure :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + i\frac{\pi - x}{2}}$$