Suites et séries de fonctions

Un peu d'histoire : Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646-1716)$

Considéré comme le plus grand intellectuel de son siècle, Leibniz est à la fois homme de loi, diplomate, philosophe, scientifique et mathématicien. Enfant doué et précoce (il affirme avoir appris tout seul le latin) il commence très jeune une carrière de diplomate qui le conduit à négocier pour son pays auprès de Louis XIV. Il s'intéresse ensuite à la physique à la philosophie et aux mathématiques. Sa plus grande contribution dans cette discipline est l'invention du calcul différentiel et intégral (étudié par la suite par Newton dans son traité des fluxions). Il est le premier à comprendre l'infiniment petit et a avoir une idée cohérente de la notion de limite. On lui doit aussi les notations classiques pour les dérivées, les intégrales, l'élément différentiel où encore le langage fonctionnel et les variables. Son apport est avant tout conceptuel et ses mathématiques sont sous-tendues par sa réfexion philosophique. Il a également prouvé de nombreux résultats mathématiques nouveaux, notamment concernant les determinants, les series entières, la geometrie differentielle (longueurs, volumes).

A : *Suites de fonctions*

1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergeant simplement vers f.
   (a) Si chaque f_n est croissante, f est elle croissantes ?
   (b) Si chaque f_n est positive, f est elle positive ?
   (c) Si chaque f_n est bornée, f est elle bornée ?
   (d) Si chaque f_n tend vers 0 en $+\infty$ f aussi ?
   (e) Si f_n est 2π périodique f est elle aussi 2π périodique ?
   (f) si $f_n(\frac{1}{n})$ tend vers 0, $f(\frac{1}{n})$ tend il aussi vers 0 ?

2. Pour les fonctions suivantes, étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur l'intervalle I (et éventuellement des intervalles plus petits)
   (a) $f_n(x) = n\cos x \sin^{n-1} x$. $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   (b) $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2}, I =]0, +\infty[$
   (c) $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}, I = \mathbb{R}^+$
   (d) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{1 + x^n}, I = \mathbb{R}^+$
   (e) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}}, I = \mathbb{R}^+$
   (f) $f_n(x) = n(\arctan(x + \frac{1}{n}) - \arctan(x)), I = \mathbb{R}$
   (g) généraliser (f) en remplaçant $\arctan$ par une fonction g de classe C^1.
   (h) $f_n(x) = \cos x. \cos\left(\frac{x}{2}\right) ...... \cos\left(\frac{x}{2^n}\right), I = \mathbb{R}^+$
   indication : simplifier l'expression $\sin(\frac{x}{2^n}).f_n(x)$
   (i) $f_n(x) = \sin \sqrt[3]{x^3 + 8\pi^3 n^3}, I = \mathbb{R}^+$
   (j) $f_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} ne^{-n^2t^2} dt$,. Discuter selon I
   (k) $f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(n+1)t^n}{t+x} dt$. $I =]0, +\infty[$

3. (centrale) Etudier la suite de fonctions définie par $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = \dfrac{2\sqrt{u_n(x)}}{1 + u_n(x)}$ sur $\mathbb{R}+$

4. On pose $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = \sin(u_n(x))$. Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite (u_n)

5. Soit f_n une suite convergent uniformément sur I et g une application définie sur $\mathbb{R}$.
   Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $g \circ f_n$ lorsque :
   (a) g est continue
   (b) g est uniformément continue

6. *difficile.* Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On définie la suite (f_n) par $f_0 = f$ et $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_n(\frac{x}{2}) + f_n(\frac{x+1}{2})\right)$.
   Etudier la convergence simple et uniforme de la suite f_n

7. *classique. difficile.* Le théorème de Dini 1.

   On considère une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues sur [0,1],décroissante (c'est à dire $f_n(x) \leq f_{n-1}(x)$) et convergeant simplement vers zéro. On se propose de montrer que la convergence est uniforme.
   Soit $\varepsilon > 0$. On pose $K_n(\epsilon) = \{x, f_n(x) \geq \epsilon\}$. Montrer que l'on définit ainsi une suite de compacts emboités.
   Montrer que l'intersection de ces compacts est vide.
   Conlcure en utilisant le théorème des compacts emboités.

8. Une preuve du théorème de Weierstrass.

   On considère la suite de polynômes définie sur $[0,1]$ par $P_0 = 0$ et

$$2P_{n+1} = x + 2P_n - P_n^2$$

   (a) Montrer la convergence simple vers $x \to \sqrt{x}$.
   On peut alors montrer la convergence uniforme par le théorème de Dini1 ou utiliser la question suivante.

   (b) Montrer l'inégalité $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$.

   (c) Montrer la convergence uniforme

   (d) En déduire que la fonctions $x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de polynômes, sur $[-1,1]$.

   (e) *difficile.* Montrer que toute fonction continue et affine par morceaux est limite uniforme d'une suite de polynômes et conclure.

9. Une suite qui converge uniformément vers e^{-x}. Soit f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$$

   On pose $g_n(x) = e^{-x} - f_n(x)$.

   (a) Montrer que sur si $x \in [0,n]$ on a :

$$0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n}$$

   (on pourra étudier le comportement de g_n en un point ou sa dérivée s'annule)

   (b) En déduire que f_n tend uniformément sur $[0,+\infty[$ vers $x \to e^{-x}$.

10. Montrer qu'il n'existe pas de suite de polynômes complexes convergeant uniformément vers $f(z) = \overline{z}$ sur le disque unité de $\mathbb{C}$.
    indication calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{it} P(e^{it})dt$ *pour* P *polynôme*

11. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^2 telles que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que la suite $(f_n'')_n$ converge uniformément vers g.
    a) Montrer que la suite (f_n') converge simplement sur $[0,1]$. (on appliquera deux fois la formule de Taylor, sur $[x,0]$ et sur $[x,1]$ pour obtenir une relation entre $f_n'(x), f_n(0), f_n(1) et f_n''$).
    b) Montrer que la suite f_n converge uniformément vers l'unique fonction telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' = g$

12. Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

    (a) Montrer que pour n assez grand, le polynôme $P_{n+1} - P_n$ est constant.

    (b) En déduire que f est un polynôme.

13. Quelles sont les fonctions qui sont limite uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes ?

14. *difficile. classique.*

    (a) Soit $f : x \in]0,1[\mapsto 2x(1-x)$. On définit $(f_n)_{n\geq 0}$ par : $f_0 = id_{]0,1[}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Etudier la convergence de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $]0,1[$.

    (b) Soient I un segment inclus dans $]0,1[$ et $g \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Etablir l'existence d'une suite de fonctions polynomiales à coefficients entiers convergeant uniformément sur I vers g.

15. *difficile.* Fonctions convexes.
    Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convexes sur un intervalle ouvert I, qui converge simplement vers g sur I.
    Montrer que g est convexe et que la convergence est uniforme sur tout segment de I

16. *très difficile.* Fonctions uniforméments lipschitziennes.
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions 1-lipschitziennes sur un segment $[a, b]$. On suppose que la suite (f_n) est uniformément bornée par une contante M. Démontrer que la suite $(f_n)_n$ possède une suite extraite uniformément convergente sur $[a, b]$

Les exercices qui suivent utilisent des théorèmes d'approximation

17. Le lemme des moments.
Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On suppose que pour tout entier n an a $nt_0^1 f(t)t^n dt = 0$.
a) Montrer que pour tout polynôme P on a $nt_0^1 f(t)P(t)dt = 0$.
b) En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que f est nulle.

18. Injectivité de la transformée de Laplace.
Soit f une fonction continue intégrable en $+\infty$ et tendant vers 0 en $+\infty$.
On suppose de plus que pour tout entier $n > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-nt}dt = 0$.
Démontrer que f est nulle (on fera un changement de variable et on utilisera l'exercice précédent)

19. *classique.* Lemme de Dubois Raymond
Soit f une fonction continue telle que pour toute fonction $g \in C^1([0, 1])$ vérifiant $g(0) = g(1)$ on ait $\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$. Montrer que f est nulle.

20. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}+$ ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}+$ d'une suite de fractions rationnelles

21. *difficile.*
Soient E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, P le sous-espace des fonctions polynomiales, f dans E. Déterminer $\sup\left\{\displaystyle\int_0^1 fp \;;\; p \in P,\ \int_0^1 |p| \leq 1\right\}$

22. *difficile.* Soit f une fonction C^1 croissante sur $[0, 1]$ montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes croissants. (on commencera par le cas ou f est strictement croissante).
Plus difficile : montrer que la conclusion reste vraie si f est seulement continue.

23. Soit f une fonction continue positive et décroissante sur $I = [0, +\infty[$. On pose $u_n = f.\mathbf{1}_{[n,n+1[}$.
    (a) Montrer que cette série de fonction converge simplement
    (b) Montrer qu'elle converge uniformément sur I si et seulement si $f(x)$ tend vers O en $+\infty$
    (c) Trouver la CNS pour que cette série converge normalement sur I.

a) Montrer la convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}+^*$ de $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n nxe^{-nx^2}$.

b) Calculer la somme.

c) La convergence est elle uniforme sur $\mathbb{R}+^*$?

25. On pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{1+n^2}$, et $f(x) = \displaystyle\sum_0^\infty u_n(x)$. Montrer :
    (a) La convergence normale sur $\mathbb{R}+$ de $\sum u_n$
    (b) La convergence normale sur tout $[a, +\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}+$ des séries $\sum u_n'$ et $\sum u_n''$
    (c) La convergence uniforme sur $\mathbb{R}+$ de $\sum u_n'$, mais pas de $\sum u_n''$ (on pourra démontrer que la convergence uniforme d'une série implique que le terme général tend uniformément vers zéro)
    (d) Sur quel intervalle f est elle C^1?, C^2 ? Trouver une relation simple entre f et f''.
    (e) Finalement, sur quel intervalle f est elle C^2?

26. (a) Convergence simple et normale de la série $\sum \dfrac{x}{1+n^2x^2}$
    (b) Etudier la limite de $xf(x)$ en $+\infty$ à l'aide du théorème de Double limite.
    (c) Déterminer la limite de f en zéro, à l'aide d'une comparaison série intégrale.

27. (généralise le précédent)
    Soit f une fonction positive intégrable et décroissante sur $\mathbb{R}^+$
    Etudier la convergence simple et uniforme de la série $\sum xf(nx)$.
    Préciser le comportement en 0 et en $+\infty$.

28. Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général $u_n(x) = (-1)^n \ln(1 + \dfrac{x}{n})$.

29. *classique.* Pour t on note $g(t) = \lim\limits_{\infty} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k+t}$.

    Montrer que g est une fonction 1 périodique de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

30. *classique. difficile.*

    Déterminer la limite de la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (1 - \frac{k}{n})^n$

    une méthode possible consiste à poser $u_k(t) = \mathbf{1}_{t>k}(1 - \dfrac{k}{t})^t$

31. *classique.* méthode de point fixe (1)

    Soit $f \in \mathcal{C}^0(]-1,1[, \mathbb{R})$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $f_0 = f$ et, si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$.

    a) Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge simplement.

    b) Déterminer sa somme.

32. méthode de point fixe (2). On considère la suite de fonction (y_n) définie sur $]-1,1[$ par :

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, \\ y_{n+1}(x) = 1 + x\sin y_n(x), \quad \text{pour tout } n \end{cases}$$

(a) Démontrer que la suite (y_n) converge simplement vers l'unique fonction y vérifiant $y(x) = 1 + x\sin(y(x))$.
indication : considérer la série de fonctions $\sum y_{n+1} - y_n$ *et utiliser que la fonction* $\sin$ *est* 1 *lipschitzienne)*

(b) Justifier que cette fonction est continue.

33. Méthode de point fixe (3)

Montrer que la suite de fonctions définie par $f_0 = 1$ et $f_{n+1}(t) = 1 + \displaystyle\int_0^x f_n(\frac{t}{2})dt$ est convergente et possède une limite solution de l'équation : $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(\dfrac{x}{2})$.

Indication : Montrer par récurrence que $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \le \dfrac{|x|^n}{n!}$

34. *difficile.* Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions de la suite de fonctions $f_n(x) = e^{-2x} - e^{-x}\displaystyle\sum_0^n \frac{(-1)^k x^k}{k!}$

indication : ecrire la formule de taylor intégrale pour e^{-x} *pour en déduire l'expression de* $f_n(x)$ *à l'aide de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^x e^{-u}u^n du$.
Puis déterminer le maximum de la fonction $t^n e^{-t}$ *sur* $\mathbb{R}+$

35. *difficile.* (X)

Soit p_n une suite telle que $n = o_\infty(p_n)$. Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_1^\infty x^{p_n} = 0$$

36. séries trigonométriques (1)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille sommable de nombres complexes.
On suppose que la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ est identiquement nulle.
Montrer que la suite $(a_n)_n$ est nulle. On utilisera le théoréme d'intégration terme à terme

37. Série trigonométrique (2)

Soit a un nombre complexe de module strictement plus petit que 1.
Calculer la somme de la série $1 + 2\displaystyle\sum_1^\infty a^n\cos(nt)$
En déduire pour tout entier p la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos pt}{1 - 2a\cos t + a^2}dt$

38. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_0^\infty \sin(\frac{x}{2^n})$.

Montrer que f est une fonction de classe C^∞ qui vérifie $f(2x) - f(x) = \sin 2x$.
Montrer que c'est la seule à une constante additive prés.
Plus généralement, déterminer les fonctions continues qui vérifient $f(2x) - f(x) = g(x)$ ou g est une fonction de classe C^1 donnée.

39. **La fonction dzéta de Riemann.**

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^x}$.

(a) Montrer que ζ est une fonction de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$, étudier ses variations et la limite en $+\infty$.

(b) Comparer $\frac{1}{n^x}$ et $\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}$ en déduire $\frac{1}{x-1}\leq\zeta(x)\leq 1+\frac{1}{x-1}$. Graphe de ζ

(c) On définit $a(x)=\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Domaine de définition, continuité ?

(d) On pose $w_n(h)=\frac{1}{n^{1+h}}-\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^{1+h}}$, $(n\geq 2)$. et $w_1(h)=1$. Montrer que $|w_n(h)|\leq\frac{1+h}{2(n-1)^{h+2}}$ pour tout $n\geq 2$.(on appliquera l'inégalité des accroissements finis) .Montrer la convergence normale de la série $\sum w_n(h)$ sur tout compact de $]-1,+\infty[$.

(e) Calculer $\sum_1^\infty w_n(0)$. (on utilisera la constante d'Euler γ)

(f) Montrer que $\zeta(1+h)=\frac{1}{h}+\sum_1^\infty w_n(h)$. En déduire $\zeta(x)=\frac{1}{x-1}+\gamma+0(1)$ au voisinage de 1.

40. Soit f une fonction continue qui vérifie $\Delta(x)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}\to l$ quand $x\to 0$.

(a) Exprimer, pour x non nul, $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ comme somme d'une série de fonctions faisant intervenir Δ.

(b) En déduire que f est dérivable en zéro.

41. Soient $(a_i)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(b_i)\in(\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ et $f:x\mapsto\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i+x\,b_i|$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est continue mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

42. Soit a_n une numérotation d'une partie dénombrable A de $\mathbb{R}$. On note h la fonction caractéristique de $\mathbb{R}+$. Posons $f(x)=\sum_0^\infty\frac{h(x-a_n)}{2^n}$. Montrer que f est une fonction croissante et déterminer ses points de continuité.

43. *difficile.*

On note $d(x)=\min(x-E(x),E(x+1)-x)$ la fonction "distance à $\mathbb{Z}$. Soit $f(x)=\sum_0^\infty\frac{d(10^nx)}{10^n}$. Montrer que f est continue mais n'est dérivable en aucun point. Pour la non dérivabilité, utiliser l'écriture décimale et étudier le compotement de f entre x et $x\pm\frac{1}{10^p}$

Séries de fonctions de plusieurs variables

44. Déterminer le domaine de définition D de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\cos(ny)\,\frac{x^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que la somme $f(x,y)$ de cette série possède des dérivéees partielles continues sur l'intérieur de D.

45. On pose $f(x,y)=\sum_{n=0}^\infty\ln(1+x^{2n}+y^{2n})$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est de classe C^1