Interversions limites-intégrales

Comme l'annonce le titre, le but de ce chapitre est de trouver des conditions suffisantes pour intervertir le symbole $\int$ avec d'autres symboles, notamment avec $\sum$, lim et ${}^{\mathrm{d}}/_{\mathrm{d}x}$. Le chapitre précédent nous permet de le faire lorsque l'on intègre sur un segment et que l'on dispose de plus d'une hypothèse de convergence uniforme. Nous chercherons des conditions plus faibles pour être capables de traiter davantage de cas.

I Le théorème de convergence dominée

I.1 Énoncé du théorème

Théorème de convergence dominée (admis)

Soit I un intervalle quelconque, et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I. On suppose :

i. (f_n) CVS vers f qui est continue par morceaux sur I
ii. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n$ est intégrable sur I
iii. Hypothèse de domination :

$$\exists\, \phi \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}(I, \mathbb{R}_+) \text{ intégrable sur } I, \text{ telle que } \forall\, n \in \mathbb{N},\, \forall\, t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors :

— f est intégrable sur I
— $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$

I.2 Commentaires à propos de l'hypothèse de domination

Les hypothèses i et ii de ce théorème sont naturelles. L'hypothèse forte est iii :

-Visualisation :

-Cette hypothèse remplace la convergence uniforme. Elle est plus souple. Noter que la différence est qu'ici on se débarrasse de la variable n et plus de la variable t : Ainsi dominer peut être vu comme une majoration **uniforme en n**.

-Le point important sera de s'assurer que la fonction dominante ϕ est **intégrable**

I.3 Preuve partielle

Remarquons que si $|f_n(t)| \leqslant \phi(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, et si $\phi \in \mathcal{L}^1(I)$, alors $f_n \in \mathcal{L}^1(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui montre que l'hypothèse (i) est inutile.

- La conclusion f est intégrable sur I est triviale, puisque $|f| \leqslant \phi$ qui est intégrable.

Donnons la preuve dans le cas ou la suite de fonctions converge uniformément sur tout segment.

I.4 Exemples

i. Considérons W_n l'intégrale de Wallis :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \,\mathrm{d}t$$

ii. **Domination par une constante sur un intervalle borné.**

iii. Trouver la limite de I_n avec :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} \,\mathrm{d}t$$

iv. **Un exemple avec intervalle variable.**

On cherche cette fois-ci à calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}t}{(1+{}^{t^2}\!/_{n})^n}$$

Le théorème de convergence dominée ne s'applique pas directement ici : pourquoi ?

S'offrent à nous deux possibilités :

— Idée 1 : Trouver un bon changement de variable pour rendre les bornes fixes
— Idée 2 : Prolonger la fonction par zéro. On peut pour cela écrire :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2/n)^n} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)}{(1+t^2/n)^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t$$

v. **Un exemple de recherche d'équivalent :**
Le théorème de convergence dominée ne donne que des **limites**. On peut l'utiliser pour trouver des équivalents en transformant un problème d'équivalent en problème de limite.

Montrer que qu'il existe une constante C telle que

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)dt \sim \frac{C}{n}$$

(on commencera par prouver que la suite tend vers 0).

I.5 Extension aux familles de fonctions indexées par un paramètre réel

Dans cette partie on souhaite étudier des familles de fonctions ne dépendant pas d'un paramètre entier $n \in \mathbb{N}$ mais d'un paramètre continu $x \in \mathbb{R}$.

Théorème (de convergence dominée avec paramètre réel)

Soit $(f_x)_{x\in[a,b[}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur I indexée par $[a,b[\subset \mathbb{R}$ (avec éventuellement $b=+\infty$). On suppose que :

i. $f_x(t) \xrightarrow[x\to b]{} f(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in I$

ii. f continue par morceaux sur I

iii. Hypothèse de domination :

$$\exists\, \phi \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{R}_+) \text{ intégrable sur } I, \text{ telle que } \forall\, x \in [a,b[,\ \forall\, t\in I,\ |f_x(t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors :

— f et les f_x sont intégrables sur I

— $\lim\limits_{x\to b} \int_I f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration : Il faut savoir reproduire cette démonstration.

Exemple Limite et équivalent d'une transformée de Laplace (théorème de la valeur initiale) :

Soit f intégrable sur $[0,+\infty[$. Posons :

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

Déterminer la limite et un équivalent de $\widetilde{f}$ en $+\infty$

II Le théorème d'intégration terme à terme

On passe maintenant aux séries de fonctions. Tout théorème permettant d'écrire

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

s'appelle un théorème d'intégration terme à terme (ou d'interversion série intégrale). Nous en avons déjà un à base de convergence uniforme. Nous en ajoutons deux, beaucoup plus commodes.

Les théorèmes de cette section sont a mettre en parallèle avec les théorèmes sur les familles sommables.

II.1 Le cas positif

Théorème (intégration terme à terme dans le cas positif, ou Beppo Levi)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions positives intégrables sur I qui converge simplement vers f continue par morceaux. Alors on a dans $[0, +\infty]$ l'égalité :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Ce théorème est particulièrement agréable car il n'a aucun hypothèse hormis la positivité des fonctions u_n (qui est donc cruciale). il se décline en deux situations :

-Cas divergent : la série $\sum_{n\geq 0} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$ diverge si et seulement si l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente (il se peut aussi dans ce cas que l'une des intégrales $\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$ soit divergente.

-Cas convergent : la série $\sum_{n\geq 0} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergent, et dans ce cas la somme de la série est égale à l'intégrale.

Exemple 1 : Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ en intégrant la série $\sum\limits_{n>0} \frac{t^n}{n}$

Exemple 2 : Montrer la divergence de la série des intégrales de Wallis.

II.2 Le cas général

Théorème (intégration terme à terme)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues par morceaux intégrables sur I et qui converge simplement sur I vers f continue par morceaux. On suppose de plus que la série :

$$\sum_{n\geq 0} \int_I |u_n(t)| \, \mathrm{d}t \text{ converge}$$

Alors :

— la fonction $f : x \longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est intégrable sur I

— On peut intervertir les symboles $\sum$ et $\int$:

$$\int_I f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n(x) \, \mathrm{d}x \right)$$

Ce théorème est admis.

Dans l'application du théorème, ne pas oublier les hypothèses initiales (chaque u_n doit être intégrable, et la série doit simplement converger).

Il va de soi que l'hypothèse la plus importante est la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \int_I |u_n(t)| \, \mathrm{d}t$. Pour ne pas se tromper ici, notamment dans la position des valeurs absolues, on réfère quelquefois à ce théorème en écrivant $\Sigma \int |\cdot|$ (dans ce ordre). Pour retenir cette hypothèse on peut aussi se rappeler l'hypothèse analogue pour les familles sommables.

Exemple : Calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}(x)} \, \mathrm{d}x$$

Les théorèmes déjà énoncés ne permettent pas de régler tous les cas : en effet, il reposent essentiellement sur une hypothèse de convergence absolue. Ainsi il ne permettent pas de conclure dans l'exemple qui suit :

Peut-on intégrer terme à terme $\frac{1}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$ sur $[0,1[$? la réponse est non car :

a) Il n'y a pas CVU sur le segment $[0,1]$

b) Le théorème d'intégration terme terme échoue.

Pour ce type de séries, on utilise le théorème présenté dans la section suivante.

II.3 Théorème de convergence dominée pour les sommes partielles

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions intégrables sur I qui converge simplement vers f continue par morceaux. On note S_n sa somme partielle d'ordre n. On suppose que :
$\exists\ \phi$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |S_n(t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors :

i. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I

ii. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration

Exemple de référence

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$$

Les cas particulier $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ donnent la somme de la série harmonique alternée ainsi que l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Récapitulons : Pour intervertir une somme et une intégrale, nous disposons des outils suivant :

- Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment (avec convergence uniforme)
- Le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif (Beppo Levi).
- Le théorème d'intégration terme à terme ($\sum \int | \, |$)
- Le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles

Remarque. Les "nouveaux" théorèmes sont "plus forts" que l' "ancien". En effet, si $\sum f_n$ CVU sur $[a, b]$, alors le théorème de convergence dominée permet d'écrire $\sum \int_I f_n = \int_I \sum f_n$.

Nous pouvons donc oublier sereinement le théorème d'intégration sur un segment lorsqu'il s'agit de faire un calcul explicite d'intégration terme à terme. En revanche ce théorème garde un intérêt théorique important, notamment en ce qui concerne l'approximation uniforme et les séries trigonométriques.

III Intégrales dépendant d'un paramètre

Le but de cette partie est d'étudier les fonctions du type

$$F : x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

III.1 Notations et vocabulaire.

Dans toute la suite, I et J désignent deux intervalles. $f : (x,t) \in J \times I \longmapsto f(x,t)$ est une fonction de deux variables.
Il est important de ne pas confondre les variables : Pour des raisons de simplicité, on notera toujours t la **variable d'intégration**. L'autre variable, x s'appelle le **paramètre** de l'intégrale.

Lorsque x est fixé, on note : $f(x,\cdot)$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$. C'est elle dont on calcule l'intégrale. Pour cette raison, on exige une première propriété de régularité :

$$\forall x,\ f(x,\cdot) \text{ est (au moins) continue par morceaux.}$$

De même, lorsque t est fixé, on note $f(\cdot,t)$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$.

III.2 Recherche du domaine de définition.

Le domaine de définition de $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est l'ensemble dJ es réels x tels que l'intégrale soit convergente.

Examinons deux exemples qui nous servirons de référence tout au long du paragraphe :

Exemple 1 : La fonction Gamma

On définit Γ la fonction suivante :

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exemple 2 : Une transformée de Laplace

Étudions le domaine de définition et la continuité de F :

$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

III.3 Théorème de continuité

Théorème

Avec les mêmes notations, supposons :

i. $\forall x \in J,\ f(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I (hypothèse toujours requise)

ii. $\forall t \in I,\ f(\cdot, t)$ est continue sur J

iii. $\exists\ \phi$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in J,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \phi(t) \qquad \text{(hypothèse de domination)}$$

Alors la fonction F définie ci-dessous est bien définie et continue :

$$F : \left| \begin{array}{ll} J & \longrightarrow \mathbb{K} \\ x & \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Démonstration

Etude de l'exemple 2 :

Tentative sur l'exemple 1

hypothèse de domination locale.
Il arrive qu'il ne soit pas possible de dominer globalement la fonction $f(x,t)$. On fait alors l'observation suivante : la continuité est une notion locale, on peut donc dominer $f(x,t)$ **localement selon le paramètre** x (attention, pas selon t !!). On peut remplacer l'hypothèse *iii* par l'hypothèse *iii*(*bis*) suivante :

(iii bis) Pour tout segment $K \subset J$, il existe ϕ_K intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in K,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \phi_K(t) \qquad \text{(hypothèse de domination locale)}$$

Reprenons l'exemple de la fonction Gamma

Le théorème dont l'énoncé suit (qui n'est pas explicitement au programme, mais dont l'utilisation est facile) montre que l'hypothèse de domination peut être facilement réalisée pour les intégrales "usuelles".

Théorème (cas particulier des intégrales sur un segment)

Soit $I = [a, b]$, et f continue sur $J \times I$. Alors $F : x \longmapsto \int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur J.

En pratique, lorsque l'intervalle est un **segment** on peut chercher **à dominer par une constante.**

III.4 Théorème de Leibniz

Le but de cette partie est de trouver une condition suffisante pour écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_I f(x, t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :

i. $f(\cdot, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur J pour tout $t \in I$

ii. $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur I pour tout $x \in J$

iii. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I pour tout $x \in J$, et il existe $\phi_1 \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}(I)$ telle que :

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant \phi_1(t)$$

Alors l'application $F : x \longmapsto \int_I f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur J et :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. On peut ici aussi remplacer (iii) par l'hypothèse de domination locale sur les segments de J. On le fera presque systématiquement.

Remarque. Comme dans le cas du théorème de dérivation des suites/Séries de fonctions, **l'hypothèse forte porte sur la dérivée et non pas sur la fonction elle même.**
Comme dans le cas des suites et séries de fonctions où la convergence uniforme locale "remonte" de la suite des dérivées $f_n')_n$ à la suite $(f_n)_n$, on peut déduire de l'hypothèse que la fonction $(t,x) \mapsto f(x,t)$ vérifie l'hypothèse de domination locale.

Démonstration

Théorème de Leibniz (version $\mathcal{C}^k$)

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :

i. $f(\cdot, t)$ est $\mathcal{C}^k$ sur J pour tout $t \in I$

ii. $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ et intégrable sur I pour tout $x \in J$ et pour tout $j \in [\![0, k]\!]$

iii. il existe $\phi_k \in \mathcal{C}^0_{\text{pm}}(I)$ telle que :

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in J,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi_k(t) \qquad \text{(domination de la dernière dérivée)}$$

Alors l'application $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^k$ sur J et :

$$\forall\, x \in J, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. En pratique, il est aussi simple de dominer toutes les dérivées que de dominer seulement la dernière. On le fera donc systématiquement. La encore, la domination locale par rapport au paramètre suffit.

Retour à l'exemple 2 : En utilisant le théorème de Leibniz montrons que

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$

III.5 La fonction Gamma

La fonction Gamma constitue l'exemple de référence (à connaître).

Dans cette section on étudie ses variations et on établit :

i. Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

ii. $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

iii. $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \frac{\Gamma(x)}{x^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

iv. $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$

v. (peut être) $\ln \circ \Gamma$ est convexe

vi. (peut être) $\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$ (Formule de Stirling)

III.6 Compléments : preuve du théorème de Beppo Levi

Vous avez noté que peu de choses ont été prouvée dans ce chapitre. Dans cette section, on montre que le théorème de Beppo Levi est une conséquence du théorème de convergence dominée. la preuve du théorème d'intégration terme à terme est similaire, mais techniquement plus difficile. Il est également possible (mais sensiblement plus délicat) de donner une preuve du théorème de convergence dominée qui rentre dans le cadre du programme.

Théorème de convergence monotone (HP)

On suppose :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{L}^1(I)$
- (f_n) est monotone
- (f_n) CVS vers f

Alors f est intégrable si et seulement si $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f(t)dt$$

Démonstration

• On considère dans un premier temps que la suite (f_n) est croissante et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n \leqslant f$.
— Si $f \in \mathcal{L}^1(I)$, alors f domine la suite (f_n) et le TCD s'applique.
— Si $f \notin \mathcal{L}^1(I)$, pour tout segment $K \subset I$, $\int_K f_n \to \int_K f$ (car $f \in \mathcal{L}^1(K)$). Or, pour tout $M > 0$, il existe K un segment de I tel que que $\int_K f \geqslant M+1$. Ainsi, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\int_K f_n \geqslant M$. Ainsi, $\int_I f_n \to +\infty$.
• Considérons maintenant que la suite (f_n) est décroissante et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f \leqslant f_n \leqslant f_0$. Comme f_0 est intégrable, le TCD s'applique ce qui conclut.
• Traitons maintenant le cas général (on peut toutefois considérer sans perdre de généralité que (f_n) est croissante). On pose :

$$\begin{cases} f_n^+(x) = \sup(f_n, 0) \\ f_n^-(x) = \sup(0, -f_n(x)) \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n^+ et f_n^- sont positives et intégrables. Remarquons que (f_n^+) est croissante et que (f_n^-) est décroissante. Comme $f_n = f_n^+ + f_n^-$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut sans difficulté.

On en déduit :

Théorème de Beppo-Levi

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions positives intégrables sur I qui converge simplement vers f. Alors :

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

En effet, si l'on considère $f_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(t)$, la suite (f_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence monotone puisque $f_{n+1} - f_n = u_{n+1}$ est une fonction positive. On a donc dans tous les cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_I u_k(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$