Théorèmes d'interversion

Les intégrales sont écrites par rapport à une variable t sur un intervalle I. L'éventuelle autre variable, notée x, appartient à un intervalle J. Les hypothèses faibles ne sont pas indiquées. Par exemple, $t \mapsto f(x,t) \in \mathrm{CM}(I,\mathbb{K})$ et $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^0(J,\mathbb{K})$ pour le th. de continuité d'une intégrale à paramètre. « Domination locale possible » signifie qu'on peut se contenter de $\forall [a,b] \subset J,\ \exists \varphi_{a,b} \in L^1(I,\mathbb{R}_+),\ \forall t \in I,\ \forall x \in [a,b],\ |\cdots(x,t)| \leqslant \varphi_{a,b}(t)$. Les hypothèses de convergence uniforme peuvent résulter de la convergence normale.

Conclusion	Nom	Hypothèse forte	Remarques
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I \lim\limits_n f_n(t)\,\mathrm{d}t$	Convergence dominée	$\lvert f_n(t)\rvert \leqslant \varphi(t)$ où φ intégrable sur I	Vérifier que $f = \lim_n f_n \in \mathrm{CM}(I,\mathbb{K})$
$\int_I \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$	Intégration terme à terme positif (Beppo Levi)	$f_n(t) \geq 0$	Valable dans $[0,+\infty]$ (cas divergent aussi)
$\int_I \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$	Intégration terme à terme sur un int. qq.	$\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge	Si l'hypothèse forte n'est pas vérifiée, appliquer la la ligne suivante
$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$	Convergence dominée pour les s. partielles.	$\lvert S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\rvert \leqslant \varphi(t)$ où φ int. sur I	Utile pour les séries alt. ou géom.
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$	Intégration d'une limite uniforme	(f_n) CVU vers f sur $[a,b]$	Valable seulement sur un segment
$\int_{[a,b]} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_{[a,b]} f_n(t)\,\mathrm{d}t$	Intégration terme à terme sur un segment	$\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur $[a,b]$	Valable seulement sur un segment
$\lim\limits_{x\to b}\left(\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I \lim\limits_{x\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}t$	Limite d'une intégrale à paramètre ou convergence dominée pour un paramètre réel	$\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$ où φ intégrable sur I	Il faut la domination sur un intervalle $[c,b[$ b peut être infini
$x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur J	Cont. d'une intég. à paramètre sur un int. qq.	$\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$ où φ intégrable sur I	Domination locale possible
$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t,\ n \in \mathbb{N}^*$	Formule de Leibniz (int. qq.) de classe $\mathscr{C}^n$($\mathscr{C}^\infty$)	$\left\lvert \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right\rvert \leqslant \varphi(t)$ où φ intégrable sur I	Domination locale possible. $\forall j \in [\![0,n-1]\!]$ et $\forall x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ intégrable Extension a la classe $\mathscr{C}^\infty$ en dominant (localement) toutes les dérivées
$f = \lim_{n\to+\infty} f$ est continue sur I	Continuité d'une limite uniforme	(f_n) CVU vers f	CVU sur I ou sur tout segment de I
$\lim\limits_{t\to b} f(t) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{t\to b} f_n(t)\right)$.	Théorème de la double limite	$(f_n)_n$ CVU vers f	Il faut la CVU sur un intervalle $[c,b[$ b peut être infini
$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)} \quad k \in \mathbb{N}^*$	Classe $\mathscr{C}^k$($\mathscr{C}^\infty$) d'une lim. de suite de fonctions	La dernière suite dérivée $(f_n^{(k)})$ CVU	Possibilité de CVU sur tout segment de I Les suites $(f_n^{(j)})$ CVS pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ Extension à la classe $\mathscr{C}^\infty$ (avec CVU de toutes les dérivées)
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I	Cont. de la somme d'une sér. de f.	$\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU	CVU sur I ou sur tout segment de I
$\lim\limits_{t\to b}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{t\to b} f_n(t)$	Théorème de la double limite	$\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU	Il faut la CVU sur un intervalle $[a,b[$ b peut être infini
$\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$	Dérivation terme à terme de classe $\mathscr{C}^k$($\mathscr{C}^\infty$)	La dernière série dérivée $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ CVU	Possibilité de CVU sur tout segment de I Les séries $\sum f_n^{(j)}$ CVS pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ Extension à la classe $\mathscr{C}^\infty$ (avec CVU de toutes les dérivées)
$x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$	Dérivation t. à t. des sér. ent.	aucune	Valable sur $]-R,R[$
$\int_{x_0}^{x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \left[\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}\right]_{x_0}^{x}$	Intégration t. à t. des sér. ent.	aucune	C'est faux sur le segment $[-R,R]$. Il faut que x_0 et x soient dans $]-R,R[$
$\lim\limits_{x\to R}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$	Convergence radiale d'Abel	La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge	Même résultat en $-R$