Convergence dominée

Un peu d'histoire : Leonard Euler (1702-1783)

Mathématicien exceptionnel à tous points de vue. Son oeuvre est immense (plus de 800 résultats publiés) et touche tous les domaines des mathématiques. Pensez par exemple à : l'indicateur d'Euler en théorie des nombres, la formule d'Euler (Moivre) en trigonométrie complexe, les fonctions intégrales d'Euler (fonction Gamma, constante gamma et autres) les angles d'Euler en géométrie etc... Sa résolution du problème des ponts de Königsberg (il s'agissait de savoir si l'on pouvait traverser la ville de Königsberg en passant une fois et une seule par chacun des ponts de la ville) a conduit à l'invention de la topologie et de la théorie des graphes. Il était également réputé pour ses prodigieux talents de calculateur. Il manipulait les séries, les produits infinis avec une dextérité inégalée. On raconte qu'une nuit d'insomnie il calcula de tête le cube de tous les entiers inférieurs à 100 et se souvint le lendemain de tous les résultats. Travailleur infatigable, il poursuivit son oeuvre jusqu'a ses derniers jours, bien qu'il soit devenu aveugle 17 ans plus tôt. Il mourut brutalement en tombant de son fauteuil alors qu'il faisait jouer son petit fils sur ses genoux.

Suites de fonctions et convergence dominée

1. Determiner les limites quand n tend vers l'infini de :

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{\frac{-x}{n}}}{1+x^2}dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n dt$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t+t^2+..+t^n}dt$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 nt(1-t)^n dt$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$. Déterminer la limite de a_n

   En utilisant le changement de variable $t = x^{1/n}$, trouver un équivalent de a_n.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $t \mapsto f(t)/t$ est intégrable sur $]0,1]$.

   (a) Trouver la limite de $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$

   (b) Montrer que $n\displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$ converge lorsque $n \to +\infty$.

4. On définit une suite de fonctions par $f_0(t) = 2t$, $f_{n+1} = \sqrt{2+f_n}$.
   Etudier la suite des intégrales $\displaystyle\int_{-1}^1 f_n$.

5. Soit f continue, nulle en dehors d' un segment. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$.

6. (centrale)
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^n)dt$.
   a) Etudier les suites (I_n) et (J_n).
   b) Montrer que $nI_n \to \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du = I$ lorsque $n \to +\infty$.
   c) Exprimer I comme somme d'une série (cette question utilise des séries de fonction)

   d) Etudier la convergence de (nJ_n).

7. *classique.*
   Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   (a) Soit M un réel positif. Etudier la limite quand a tend vers zéro de $\displaystyle\int_0^M |f(t+a)-f(t)|dt$

(b) En déduire la limite quand a tend vers zéro de $\int_0^{+\infty} |f(t+a)-f(t)|dt$ On pourra pour cela commencer par fixer ε et choisir M tel que $\int_M^{+\infty} |f(t)|dt < \varepsilon$.

8. Un lemme de Cantor
Soient (a_n) et (b_n) deux suite (réelles) telles qu' il existe un intervalle $[a,b]$ non trivial I sur lequel

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt = 0$$

On se propose de montrer que (a_n) et (b_n) tendent vers zéro.

(a) Par un calcul direct, déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $\int_a^b \frac{(a_n \cos nt + b_n \sin nt)^2}{a_n^2+b_n^2}dt$

(b) En déduire par le théorème de convergence dominée que $a_n^2+b_n^2$ tend vers 0 et conclure.

9. Un exercice pour étudier les hypothèses du théorème de convergence dominée.
On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^a} \text{ sur } [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
avec $a > 0$ Déterminer selon a

(a) La limite simple de la suite f_n

(b) La limite de la suite $\int_0^\infty f_n(t)dt$

(c) Si la suite (f_n) vérifie l'hypothèse de domination

10. *difficile.* Lemmes de Fatou et Scheffé
Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables (continues par morceaux) et positives sur un intervalle I
On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f intégrable.

(a) Montrer que $\int_I (f-f_n)^+ \to 0$

On suppose désormais que $\int_I f_n \to l \in \mathbb{R}^+$

(b) Démontrer $\int_I f \leq l$ (lemme de Fatou)

(c) Donner un exemple prouver que l'inégalité peut être stricte

(d) On suppose que $\int_I f = l$. Montrer que $\int_I |f-f_n| \to 0$ (Lemme de Scheffé)

(e) (Autre application du lemme de Fatou)
On considère une suite (f_n) de fonctions positives intégrables sur I qui converge simplement vers une fonction f (continue par morceaux sur I).
Montrer que si la suite $(\int_I f_n)$ est bornée, alors f est intégrable.

11. Soit f une fonction positive et continue.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $u_n = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{n}}}{f(t)+1}dt$ converge.

12. *classique.* Calcul de l'intégrale de Gauss :
On pose $f_n(t) = (1-\frac{t^2}{n})^n \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)$.

(a) Etablir que $f_n(t) \leq e^{-t^2}$ et calculer la limite simple de la suite (f_n).

(b) Exprimer $\int_0^\infty f_n(t)dt$ en fonction d'une intégrale de Wallis $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

(c) On rappelle que $w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$.

13. *difficile. classique.* En utilisant une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, établir que

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\ln t dt = -\gamma$$

où γ désigne la constante d'Euler

On fera intervenir la suite de fonctions $f_n(t) = (1 - \dfrac{t}{n})^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t)$.

Intervertion de séries et d'intégrales

14. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x dx = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$. En déduire la valeur approchée à 10^{-10} près de cette intégrale.

15. a) Montrer sans calcul la divergence de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

b) Calculer, aprés avoir justifié la convergence, $\displaystyle\sum_1^{\infty}(-1)^n u_n$.

16. *classique.*
Soit a un nombre complexe dont le module n'est pas égal à 1.

(a) A l'aide d'une interversion série intégrale, calculer lorsque $|a| > 1$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{a - e^{i\theta}} d\theta$.

(b) En utilisant une série différente calculer la même intégrale lorsque $|a| < 1$

(c) En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|a - e^{i\theta}|d\theta$ (cette question utilise les intégrales dépendant d'un paramètre).

17. (a) Montrer l'existence de I=$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{sht} dt$.

(b) La calculer à l'aide d'une interversion série-intégrale.

18. Soit $(a_n)_n$ une suite réelle telle que la série $f(z) = \displaystyle\sum_0^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour tout complexe z tel que $|z| \leq 1$.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 f^2(t)dt = \frac{-1}{i}\int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it}dt$

(b) En déduire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(\sum_{k=0}^{2n} a_k a_{2n-k}) \leq \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

19. (centrale)
Soit $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(2n+1)}$.

Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ que l'on déterminera tel que $S = a\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} + b\pi$.

20. (mines)
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs divergeant vers l'infini.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-a_n x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$.

21. Etudier la dérivabilité de $x \to \int_0^{\sin x} \exp(xt+t^2)dt$

22. Le théorème de Leibniz n'est pas toujours nécessaire :
    Soit f une fonction continue. Montrer que la fonction $x \to \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt$ est de classe C^2 et déterminer sa dérivée seconde.

23. (mines) On pose, pour $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^{x+1}}dt$.
    (a) Quel est le domaine de définition de F ?
    (b) Étudier la continuité de F.
    (c) Donner une expression simple de F pour $x > 1$.

24. Calculer l'intégrale
    $$\int_0^\infty \frac{t^x - 1}{\ln t}dt$$
    indication : dériver

25. *classique.* Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$ et $a = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
    (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+_*$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' - y = \frac{-a}{\sqrt{x}}$.
    (b) Prouver que $f(x) = ae^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.
    (c) En déduire a.

26. *cet exercice est difficile sur le plan technique.*
    Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin \sqrt{t}dt$.
    (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa limite en $+\infty$.
    (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre.
    integrer deux fois f' par parties
    (c) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

27. Donner le domaine de définition de $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.
    (a) Continuité, limites ?
    (b) Exprimer $F(x+1)$ en fonction de $F(x)$.
    (c) Trouver un équivalent de F aux bornes de son domaine de définition.

28. On pose $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1+xu}du$.
    (a) Montrer que la fonction f est définie et indéfiniment dérivable sur l'intervalle [0,+∞[.
    (b) Montrer que f n'est somme d'une série entière sur aucun intervalle de la forme [0,a[.
    (c) Déterminer la limite en +∞ de $f(x)$ et de $xf(x)$.
    (d) Etablir l'égalité $f(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}dt$.
    (e) En déduire que $f(x) \sim \frac{\ln x}{x}$ quand $x \to \infty$

29. *difficile. classique.*
Pour $r \in [0,1[$ et θ réel on pose $P(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}$
   (a) Existence et calcul de $P(r,\theta)$
   (b) Soit f une fonction 2π périodique et continue. On pose $f_r(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\theta)P(r,\theta)d\theta$.
   Montrer que f_r est continue , 2π péridique et que f_r converge uniformément vers f quand r tend vers 1.

30. Phénomène de concentration de masse (1) :
Trouver un équivalent quand $\lambda \to \infty$ de
$$I(n) = \int_0^1 e^{-nx}f(x)dx$$
lorsque f est une fonction continue.

31. *difficile.* Phénomène de concentration de masse (2)
Trouver un équivalent quand $\lambda \to \infty$ de
$$I(n) = \int_0^1 e^{n(x^2-x)}f(x)dx$$
lorsque f est une fonction continue.

32. *difficile.* Phénomène de concentration de masse (3) Soit f fonction de classe C^2 strictement décroissante positive sur l'intervalle $[0,1]$.
Déterminer un équivalent de $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 f(t)^\lambda dt$ quand λ tend vers l'infini dans les deux cas suivants :
- $f'(0) \neq 0$.
-$f'0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$.

33. *difficile.* (centrale)
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $K \in \mathcal{C}^0([0,1]^2,\mathbb{R})$. On pose, si $f \in E$ et $x \in [0,1]$: $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x K(x,y)\ f(y)dy$.
a) Montrer que T est un endomorphisme de E.
b) Soit $f \in E$ telle que : $\exists m \geq 0, \forall x \in [0,1], |f(x)| \leq m \displaystyle\int_0^x |f|$. Montrer que $f = 0$.
c) Montrer que T n'a pas de valeur propre non nulle.
d) Ici on suppose que K est de classe $\mathcal{C}^1$ et que : $\forall x \in [0,1]$, $K(x,x) > 0$. Montrer que T n'a pas de valeur propre.

34. *difficile.* Une Démonstration du théorème de d'Alembert Gauss.
Soit P un polynôme non constant. On suppose que P n'a pas de racine complexe.
   (a) Montrer que la fonction
   $$f : r \to \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})}e^{it}dt$$
   est continue
   (b) Déterminer la limite de $f(r)$ quand r tend vers l'infini (on pourra montrer que $\dfrac{r}{2\pi}\dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})}e^{it}$ est majoré par une constante indépendante de r et t).
   (c) Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et en déduire une contradiction.
   indication : introduire la fonction $H : t \mapsto e^{2\pi i h(t)}$ ou h est une primitive de $t \to \dfrac{r}{2\pi}\dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})}e^{it}$