Séries entières

Un peu d'histoire : Gauss (1777-1855)

Succédant à Euler, dans l'ordre chronologique, Carl Friedrich Gauss, surnommé « le prince des mathématiques », est le seul qui le surpasse peut être par le génie. Ses travaux ont également porté sur tous les domaines des mathématiques et, si l'on en croit Jean Dieudonné (mathématicien et historien des sciences) rien ne fut publié pendant 25ans qui n'ait été écrit, ou présenti par Gauss. Ses contemporains lui vouaient une vénération un peu craintive. Il fut l'un des premier à comprendre l'intérêt des structures algébriques (groupes , corps) et leur lien avec l'arithmétique où il était prodigieux, et travaillait aisance dans des espaces abstraits, se battant contre « l'infirmité humaine qui nous enferme dans 3 dimensions ». Nombre de ses découvertes ne furent pas comprises de son vivant, telles les formes modulaires (fonctions complexes intervenant aujourd'hui en arithmétique, par exemple dans le théorème de Fermat) qu'il avait construites et qui ne seront utilisées que 75ans plus tard. Il a, par ailleurs, contribué (avec Cauchy, en analyse) à donner aux mathématiques leur rigueur actuelle : les mathématiciens du 18eme siècle avaient coutume de sommer des séries divergentes, et négligeaient souvent des détails importants dans les preuves.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ et son comportement pour $x = R$ dans les cas suivants :
   (a) $a_n = \arctan(n^\alpha)$
   (b) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$
   (c) $a_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{n! n^n}$
   (d) $a_n = \cos(n\frac{\pi}{3})$
   (e) $a_n = n^{(-1)^n}$
   (f) $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si n n'est pas un carré} \\ pe^p \text{ si } n = p^2 \end{cases}$

2. Déterminer le rayon des séries entières suivantes :
   (a) $\sum d(n) z^n$ (On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n)
   (b) $\sum 2^{1+2+\ldots+n} z^{n^2}$
   (c) $\sum \left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \right) z^n$
   (d) $\sum \frac{x^{n!}}{n!}$
   (e) $\sum e_n x^n$ (ou e_n désigne la $n$ième décimale de $\sqrt{3}$)
   (f) $\sum \frac{(1+i)^n}{2 + \sin n} z^{2n}$

3. On considère la suite $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$.
   (a) Calculer les limites des suites de termes généraux $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n}}$ et $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n-1}}$.
   (b) En déduire le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$.
   (c) Étudier la convergence sur le cercle d'incertitude.

4. Soient $(a_n)_{\geq 0}$ une suite de nombres complexes et $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. On note R, R_1, R_2 les rayons de convergence respectifs de $\sum a_k x^k, \sum a_{n_k} x^{n_k}, \sum a_k x^{n_k}$.

   Comparer R et R_1.
   Comparer R et R_2.

5. Etudier le rayon de convergence R des séries entières $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :
   (a) $a_n = b_0 + ... + b_n$ avec $\sum b_n x^n$ de rayon R (on demande une inégalité sur le rayon et des exemples prouvant qu'elle peut etre stricte ou non)
   (b) $a_n = \frac{b_n}{n!}$ avec $\sum b_n x^n$ de rayon R non nul
   (c) $a_n = b_n^2$ avec $\sum b_n x^n$ de rayon R
   (d) $a_n = F(n) b_n$ avec $\sum b_n x^n$ de rayon R et F fraction rationnelle

6. On note R et R' les rayons respectifs des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Que dire du rayon de convergence des séries :
   (a) $\sum a_n b_n z^n$
   (b) $\sum a_n z^{2n}$

Calculs de sommes

7. Calculer la somme des séries entières suivantes sur leur intervalle ouvert de convergence.

   (a) $\sum \frac{n^3+2n+1}{n!} x^n$,

   (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(n+5)x^n}{(n+1)(n+2)}$

   (c) $\sum \frac{\sin(n\alpha)x^n}{n!}$

   (d) $\sum_1^\infty \frac{\sin(n\theta)x^n}{n}$

   (e) $\sum \left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right) x^n$

   (f) $\sum \operatorname{tr}(A^n)x^n$ avec A matrice carrée complexe.

8. Séries entières et récurrences linéaires.
   On considère une suite vérifiant la récurrence
   $$a_{n+2} = 3(n+2)a_{n+1} - 2(n+1)(n+2)a_n$$
   et on pose
   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$
   (a) En suppose que cette série possède un rayon R non nul, déterminer explicitement $f(z)$ pour $|z| < R$

   (b) Calculer alors a_n et en déduire que la supposition précédente était justifiée.

9. Calculer la somme de la série $\sum \frac{n^3+n}{2^{4n-3}}$

10. Soit p un entier. Montrer que le nombre $\alpha_p = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ est un entier.

11. *classique. difficile.*

    Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k\, u_{n-k}$.

    Calculer u_n.

12. *classique.*
    On note a_n le nombres de triplets $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant $p + 2q + 3r = n$.

    Montrer l'égalité $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$

    En déduire a_n et un équivalent de a_n

13. (X) difficile

    Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2k}{k}}$

    On montrera que la série $\sum a_n x^n$ *vérifie l'équation différentielle* $x(4-x)y' - (x+2)y = -2$

14. On considère la suite (F_n) définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

    (a) Donner une expression simple de F_n. En déduire un équivalent de F_n lorsque $n \to +\infty$.

    (b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-k}{k}$ et que, pour x dans un domaine D à préciser, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$

    (c) De combien de manières peut-on tapisser un échiquier de largeur 2 et de longueur $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de dominos de dimension 2×1 ?

Fonctions développables en série entière

15. Développer en série entière les fonctions f définies par les égalités suivantes :

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin^2(x)$

(b) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

(c) $f(x) = \ln(1+2x-3x^2)$

(d) *difficile.* $f(x) = \arctan(\frac{1}{x+1})$

16. On considère la fonction $f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$
    (a) Montrer par un argument théorique que cette fonction est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
    (b) Calculer la dérivée de f et en déduire une équation différentielle simple satisfaite par f.
    (c) Déterminer le DSE de f.

17. Démontrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 0 :
    (a) $f(x) = e^{e^x}$
    (on ne cherchera pas la valeur explicite des coefficients)
    (b) $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-xt^2}}dt$

18. Résoudre l'équation différentielle $x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0$ en cherchant ses solutions développables en série entière.

19. (a) Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :
    — $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul.
    — $\exists A, B > 0\ |a_n| \leq AB^n$
    (b) Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une fonction développable en série entière au voisinage de 0 et vérifiant $f(0) = 1$.
    i. Déterminer la relation de récurrence (R) que doit vérifier par la suite b_n pour que la série entière $g(x) = \sum b_n x^n$ vérifie $f(x)g(x) = 1$
    ii. Démontrer que la série $\sum b_n x^n$ ainsi déterminée est de rayon non nul.
    (c) Montrer que $\frac{1}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

20. Le principe des zéros isolés :

    Soit f une fonction développable en série entière de rayon R. qui n'est pas la fonciton nulle. Soit $x_0, |x_0| < R$.
    (a) Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 à l'aide des coefficients de la série entière. En déduire qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel f s'annule au plus une fois.

    (b) Montrer que la fonction $h(t) = f(t+x_0)$ est développable en série entière de rayon $\geq R - |x_0|$. (on dit que les zéros sont isolés)
    (c) Montrer que f ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois sur tout segment de $]-R, R[$).
    indication : dans le cas contraire, construire une suite de zéros dans ce segment, et aboutir à une contradiction.

21. Soit f de classe C^1 solution de l'équation $f(x+1) - f(x) = af'(x)$ ou a est un nombre complexe donné.

    Montrer que f est de classe C^∞ et donner une expression de sa dérivée n ième.
    On suppose que f est bornée. Montrer que f est développable en série entière.

22. *classique. difficile.* Fonctions absolument monotones.
    Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a, a[, \mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[, f^{(n)}(x) > 0$.
    (a) Si $|x| < r < a$, montrer :
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k \right| \leq \left| \frac{x}{r} \right|^{n+1} f(r).$$
    indication : on écrira la formule de Taylor $R_n(x)$ avec reste intégrale $R_n(x)$. Puis on fera un CDV ramenant les bornes de l'intégrale à $[0,1]$ et enfin on remarquera que la dérivée $n+1$ ieme de f est croissante pour montrer que $|R_n(x)| \leq \left|\frac{x}{r}\right|^{n+1} R_n(r)$

(b) En déduire que f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

(c) Application : Montrer que $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

Etude des séries entières au voisinage du point R

23. Etude aux bords (1) :
On pose
$f(x)=\sum_{1}^{\infty}\sqrt[4]{n^4+1}x^n$

(a) Déterminer le domaine de définition de f

(b) Montrer que pour tout x positif et pour tout entier N on a $f(x)\geq \sum_{1}^{N}\sqrt{n}x^n$. En déduire avec preuve précise que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1.

(c) Démontrer que $f(x)$ est équivalent quand x tend vers 1 à $g(x)=\sum_{1}^{\infty}nx^n$ (on pourra par exemple majorer la différence). En déduire un équivalent de $f(x)$ en 1.

(d) Montrer que (contrairement à l'intuition !) $f(x)$ possède une limite finie en -1 (on utilisera la même fonction $g(x)$.

24. Un théorème de sommation d'équivalents dans le cas positif (1) :
Soient (c_n) et (b_n) deux suites positives telles que $c_n \sim b_n$. On suppose que la série $\sum c_n$ est divergente. Montrer que les fonctions $g(x)=\sum_{0}^{\infty}c_nx^n$ et $h(x)=\sum_{0}^{\infty}b_nx^n$ sont équivalentes quand x tend vers 1.

25. Sommation d'équivalents (2) :
On pose $f(x)=\sum_{1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$.
Montrer que $f(x)\underset{\infty}{\sim} e^{ex-\frac{1}{2}}$

26. Sommation d'équivalents (3)
Soit $\alpha>-1$.
a) Donner le rayon de convergence R de $f_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^\alpha x^n$.
On désire trouver un équivalent de f_α lorsque x tend vers R^-.
b) On suppose que α est un entier p.
i) Calculer f_0, f_1. Trouver les équivalents recherchés.
ii) Montrer qu'il existe $Q_p\in\mathbb{R}[X]$ tel que $f_p(x)=\dfrac{Q_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$ (on calculera f'_p). En déduire l'équivalent recherché.
c) On suppose α quelconque.
i) Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^{1+\alpha}}$. On notera b_n ses coefficients.
ii) Montrer qu'il existe $A(\alpha)>0$ tel que $n^\alpha\sim A(\alpha)b_n$.
Ind. On étudiera la nature de la série de terme général : $\ln\dfrac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}}-\ln\dfrac{n^\alpha}{b_n}$.
iii) En déduire que $f_a(x)$ est équivalente à $\dfrac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$ quand x tend vers R^-.

27. Applications du théorème d'Abel radial.

(a) Calculer la somme $\sum\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

(b) Calculer $\sum_{0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{2n+1}$

(c) On admet que la série $\sum \frac{\sin(na}{n})$ converge (cela provient d'une transformation d'Abel) Calculer la somme de cette série.

On pourra considérer la série entière $\sum \frac{\sin(na}{n} x^n$.

28. Comportement de séries entière au voisinage du point R : cas des séries positives.

Soit a_n une suite positive telle que $f(x) = \sum_1^{\infty} a_n x^n$ soit définie sur $]-R, R[$.

Démontrer l'équivalence :
$f(x)$ a une limite en $R \Leftrightarrow$ la série $f(R)$ converge.
En cas de divergence, montrer que $\lim_{x \to R} f(x) = +\infty$

29. *difficile.* Théorème de Tauber :

Soit $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon 1.

On suppose que $f(x)$ possède une limite finie l quand x tend vers 1 et que $na_n = o(1)$

Démontrer que $\sum a_n$ converge et que $\sum_0^{\infty} a_n = l$

Indication : étudier la suite $f(1 - \frac{1}{n}) - \sum_0^n a_k$

Séries entières de la variable complexe

Les deux exercices qui suivent utilisent le principe d'unicité pour prolonger des identités réelles sur le plan complexe : On rappelle donc que si une série entière s'annule sur un intervalle $]0, \varepsilon[$ *alors elle est indentiquement nulle.*

30. racine carrée complexe (centrale)
Montrer qu'il existe une série entière de la variable complexe $f(z) = \sum a_n z^n$ qui vérifie pour tout z de module strictement inférieur à 1 la formule $f(z)^2 = 1 - z$.

31. Logarithme complexe. Montrer qu'existe une série entière de rayon 1 telle que pour tout z de module strictement inférieur à 1 on ait : $e^{f(z)} = 1 + z$

Les exercices qui suivent reposent essentiellement sur la formule intégrale de Cauchy.

32. Expression intégrale des coefficients et application.

(a) Soir $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon R et $r < R$. Calculer les intégrales $\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$

(b) Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon infini et dont la somme est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que la somme est constante.
rayon.

(c) On garde les mêmes notations et on suppose qu'il existe deux constantes M et r telles que :

$$\forall z,\ |z| > 1,\ |f(z)| \leq M|z|^r$$

Montrer que f est un polynôme.

33. En calculant $\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$ déterminer les séries entières telles que $|f(z)|$ soit maximal en 0

34. *difficile.* (centrale) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ une série de rayon R et $r < R$.

   (a) Calculer selon z l'intégrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})e^{it}}{re^{it} - z} dt$$

   (b) On suppose que f ne prend que des valeurs réelles sur un cercle de centre 0. Montrer que f est constante.

35. (X)
Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite à coefficients entiers telle que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.

   On suppose que $f : z \in B(0,1) \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est bornée. Montrer que f est polynomiale.

   Indication : Calculer, pour $r < 1$ l'intégrale $\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$