Séries entières

I Définitions - Rayon de convergence

I.1 Définition

Définition

On appelle <u>série entière</u> de la variable complexe z toute série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Exemple. Les séries géométriques, la série exponentielle, sont des séries entières.

I.2 Rayon de convergence

Lemme d'Abel

Lemme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Rayon de convergence

Théorème

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que :
- Si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument
- Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)$ est non bornée.

On appellera R le <u>rayon de convergence</u> de la série entière $\sum a_n z^n$.

Démonstration

Commentaires et vocabulaire

- Lorsque $R = 0$, la série $\sum a_n z^n$ converge si et seulement si $z = 0$.
- Lorsque $R = +\infty$, la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- Si $R \in]0, +\infty[$, le plan complexe est découpé en trois parties :

— $\mathcal{D}(0, R)$ le **disque ouvert de convergence** : dans ce disque on a toujours convergence absolue
— $\mathcal{C}(0, R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = R\}$ le cercle de centre O et de rayon R
— $\{z \in \mathbb{C},\ |z| > R\}$: l'extérieur du disque fermé. Dans cet ensemble on a toujours divergence grossière

Remarque. Sur le cercle $\mathcal{C}(0, R)$, la nature de la série n'est pas connue et peut être très différente selon le point sur lequel on se place. Pour cette raison, on l'appelle parfois le cercle d'incertitude.

Exemple. Les séries $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$, et $\sum n^{10} z^n$ sont toutes de rayon 1.
Qu'en est-il de leurs convergences respectives sur $\mathcal{C}(0, 1)$?

I.3 Propriétés et méthodes de calcul

Proposition

$\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ sont de même rayon. (le signe de a_n n'importe pas)

Proposition (D'Alembert pour les séries entières)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Alors :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \in [0, +\infty] \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{L}$$

Démonstration

Remarque. Si le critère de D'Alembert est souvent dépassé pour les séries numériques, il est d'une efficacité redoutable pour déterminer les rayons de convergence.
Exemple. Déterminons le rayon de convergence de :

$$\sum \frac{e^{-\sqrt{n}} (n!)^2}{3^n (2n)!} z^n$$

Remarque. Dans le cas des séries lacunaires, c'est à dire lorsque la suite (a_n) s'annule "souvent", on revient au critère de D'Alembert usuel.
Exemple. Étudions par exemple la série suivante :

$$\sum \frac{n^3}{2^n} z^{3n+1}$$

Théorème de comparaison

Théorème

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.
- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$
- Si $|a_n| = \mathcal{O}(|b_n|)$, alors $R_a \geqslant R_b$
- Si $|a_n| = o(|b_n|)$, alors $R_a \geqslant R_b$
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$

Démonstration

Exemple. Étudions le rayon de convergence de $\sum(2+\sin(n\theta))z^n$.

Utilisation d'un point particulier

Principe : On dispose de certaines informations au point $z = z_0$. Que dire de R ?

Proposition

- Si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors $R \geqslant |z_0|$
- Si $a_n z_0^n$ ne tend pas vers 0, alors $R \leqslant |z_0|$
- Si $\sum a_n z^n$ converge, alors $R \geqslant |z_0|$
- Si $\sum a_n z_0^n$ converge absolument, alors $R \geqslant |z_0|$

Exemple.
- On suppose que a_n tend vers 0 et que $\sum a_n$ diverge. Montrer que la série $\sum a_n z^n$ est forcément de rayon 1.

Remarque : Renormalisation

Proposition

Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon $R \in]0, +\infty[$. Alors $\sum a_n R^n z^n$ a pour rayon 1.

Ce résultat explique que l'on travaillera souvent avec des séries de rayon 1 ou infini.

I.4 Série dérivée

Définition

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle série dérivée la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$, ou encore la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n$.

Proposition

Une série entière et sa dérivée ont même rayon.

La démonstration est assez subtile et doit être comprise.

Remarque plus générale

La preuve précédente prouve que la multiplicaiton par une puissance de n n'affecte pas le rayn

Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n n^\alpha z^n$ ont même rayon.

I.5 Opération

Somme de deux séries entières

Définition

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. La série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ s'appelle série entière somme des deux séries initiales.

Remarque importante mais triviale : c'est aussi une série entière !

Produit de Cauchy

Bien que moins trivial (mais tout aussi important) le résultat est aussi vrai pour les produits :

Proposition

Le produit de Cauchy de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est une série entière $\sum c_n z^n$.

Exemple : Calculer le produit des série $\sum_n z^n$ et $\sum_n a_n z^n$.

Rayon de la somme et du produit

Proposition

Si on note R_a, R_b sont les rayons de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ alors leur somme et leur produit ont toutes les deux un rayon **supérieur ou égal à** $\min(R_a, R_b)$.

I.6 Résumé : méthode d'étude de la convergence d'une série entière :

- On commence toujours par déterminer le rayon de convergence R : ceci donne la nature de la série pour tout z tel que $|z| \neq R$.
-Seulement si c'est demandé, on étudie pour $|z| = R$: l'étude peut être difficile.

Pour le calcul du rayon toujours procéder de la façon suivante :

- Privilégier la règle de d'Alembert : si le terme général est explicite elle marhce presque toujours : attention s'il y a des termes nuls. Si le terme général est compliqué, on peut d'abord en prendre un équivalent.
- En cas d'échec, et seulement dans ce cas, envisager les autres méthodes : comparaison, étude en un point.
- Pour les exercices les plus formels seulement, revenir à la définition et au lemme d'Abel.

I.7 Deux compléments sur les rayons de convergence

Caractérisation des séries de rayon non nul

Proposition

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i. $\sum a_n z^n$ a un rayon non nul

ii. (a_n) est majorée par une suite géométrique : $\exists A > 0, B > 0, \forall n, |a_n| \leq A \cdot B^n$

Une formule qui donne toujours R (HP)

Définition

Soit (α_n) une suite réelle. On note $\underline{\lim}\, \alpha_n$ la plus petite valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ de (α_n). On note de façon analogue $\overline{\lim}\, \alpha_n$ la plus grande valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ de (α_n).

Proposition

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors :

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$$

La démonstration de ces résultats est laissée en exercice.

II Étude de la série de fonction de la variable réelle

II.1 Lemme de convergence normale

Lemme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. Notons $u_n : z \longmapsto a_n z^n$. Alors $\sum u_n$ converge normalement sur tout compact du disque ouvert $D(0, R)$.

Remarque. En général, il n'y a ni CVN ni CVU sur $D(0, R)$.

II.2 Cas de la variable réelle

Dans toute cette partie on considère $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R et $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Domaine de définition

Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est inclus dans $[-R, R]$ et contient $]-R, R[$.

Convergence normale

Il y a convergence normale sur tout $[a, b]$ inclus dans $]-R, R[$.
En général on étudie sur $[-a, a]$ avec $a < R$

II.3 Le théorème de dérivation des séries entières

"‘ Les séries entières sont particulièrement régulières et simples à dériver :

Théorème

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. On pose, pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et toutes ses dérivées se calculent terme à terme.

Conséquence pratique : pour dériver une série entière terme à terme sur l'intervalle ouvert, il suffit juste de vérifier (et de dire) que c'est une série entière.

Attention : ce théorème ne donne aucune information si $x = R$ ou $x = -R$.

II.4 Théorème de primitivation

Théorème

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon R
On peut intégrer terme à terme $f(x)$ sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert $]-R, R[$.
En particulier, la primitive d'une série entière est une série entière de même rayon R :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

II.5 Le théorème d'Abel radial

Nous avons dit que les théorèmes précédents s'appliquent sur l'intervalle **ouvert** $]-R, R[$. D'une manière générale, l'étude aux points R et $-R$ est beaucoup plus difficile. Nous disposons cependant d'un outil pour cette étude :

Théorème (Abel radial)

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon R. On suppose que la série converge pour $x = R$. Alors f est continue sur l'intervalle $[0, R]$ fermé. Autrement dit :

$$\lim_{x \to R} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Ce théorème est admis. (voir preuve en exercice)

Exemples :

Les résultats précédents possèdent de multiples applications à la fois théoriques et calculatoires. commençons par les applications théoriques :

II.6 Expression des coefficients - Théorème d'unicité

Proposition

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$. Alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Théorème (d'unicité des séries entières)

a) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$.

On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

b) Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum a_n z^n$ deux séries entières de rayons non nuls.
On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]-\epsilon, \epsilon[$, $f(x) = g(x)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Du théorème d'unicité résultent de nombreux résultats. Par exemple :

Proposition (séries entières paires et impaires)

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon strictement positif. Alors :

- f est paire si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$
- f est impaire si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$

II.7 Applications à des calculs de sommes

L'idée de cette partie est de calculer la somme de séries d'après la valeur de $\sum a_n x^n$, supposée connue.

- Multiplier par n :

Si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$, alors :

$$xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

Exemple. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}$ est un entier.

- Intégrer :

Exemple. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)2^n}$.

II.8 Application des séries entières aux équations différentielles linéaires

On se donne une équation différentielle linéaire simple (i.e. d'ordre inférieur ou égal à 2), souvent sans second membre. Les coefficients sont des fonctions simples de x. Une méthode de résolution consiste à chercher si cette équation différentielle possède des solutions qui sont des séries entières.
La méthode eest la suivante et doit être parfaitement connue :

- Analyse :

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière candidate. On dérive f et on la substitue dans l'équation différentielle. On obtient $\sum b_n x^n = 0$, avec b_n qui dépend des coefficients a_k. Le théorème d'unicité nous assure que $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui nous permet de calculer les a_n par récurrence.

- Synthèse :

On calcule le rayon de $\sum a_n x^n$. S'il n'est pas nul, la fonction f trouvée est bien solution sur $]-R, R[$.

Exemple. (de référence) Chercher les solutions de l'équation différentielle :

$$(1+x)y' - \alpha y = 0$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire que :

$$\forall\, x \in]-1, 1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

III Fonctions développables en série entière

III.1 Définitions

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant 0. On dit que f est développable en série entière au voisinage de zéro (on notera f DSE) lorsque :

$$\exists\, \epsilon > 0,\ \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall\, x \in]-\epsilon, \epsilon[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Définition

On dit que f est développable en série entière au voisinage de x_0 lorsque :

$$\exists\, \epsilon > 0,\ \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall\, x \in]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

III.2 Deux conditions nécessaires

Proposition

- Si f est DSE en 0, alors elle est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
- Si f est DSE en 0, alors la série entière est forcément $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Définition

Pour f $\mathcal{C}^\infty$, on appelle série de Taylor en 0 de f la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, on se pose donc les deux questions suivantes (aucune des deux n'est triviale !) :

i. Sa série de Taylor est elle convergente ? ($R \neq 0$)
ii. En cas de convergence, sa somme est-elle f ?

III.3 Propriétés générales

Proposition

Si f et g sont développables en série entière au voisinage de O alors il en est de même de
$f + g$
$f \cdot g$
f'
Les primitives de f

Autrement dit, si l'on note $\mathcal{E} = \{f$ définies et DSE au voisinage de $0\}$, alors $\mathcal{E}$ est une algèbre stable par dérivation et primitivation.

III.4 Développements provenant de la série géométrique

Commençons par remarquer l'égalité suivante :

$$\boxed{\forall\, z \in \mathcal{D}(0,1), \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n}$$

On en déduit :
- $\frac{1}{x-a}$ est DSE au voisinage de 0 pour $a \neq 0$
- $\frac{1}{(x-a)^n}$ est DSE au voisinage de 0 pour $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{x}$ est DSE au voisinage de tout $x_0 \neq 0$

Théorème

Soit F une fraction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle. Alors F est DSE au voisinage de 0.

Exemple. Déterminer le DSE de $f : x \longmapsto \frac{x}{(x+3)(x-2)}$ et de $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x+x^2}$

Théorème DSE de logarithme et Arctan

$$\forall\, x \in]-1,1], \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

il est impératif de connaitre ces DSE.

Exemple. Montrer que $f : x \longmapsto \ln(x+x^2)$ est DSE au voisinage de 1.

Exemple. Soit $\theta \in]0, \pi/2[$. On considère F la fonction suivante :

$$F : x \longmapsto \arctan\left(\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

Montrer que F est DSE au voisinage de 0.

III.5 Développements provenant de la série exponentielle

Commençons par remarquer l'égalité suivante :

$$\boxed{\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

On en déduit les très importants développements suivants :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (1)}$$

et également les développements :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (2)}$$

Les rayons des séries précédentes sont tous infinis.

Quelques remarques sur les fonctions précédentes :

— Les formules (1) et (2) font intervenir des séries de rayon infini qui par conséquent convergent sur $\mathbb{C}$. On peut donc les utiliser pour **étendre la définition du cosinu et du sinus au champ complexe** : il suffit de remplace x par z.

— Dans cette extension, on peut démontrer facilement **que toutes les formules de trigonométrie restent vérifiées.** Par exemple, pour tout complexe z, $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
En effet, $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$. Comme elle est DSE, le théorème d'unicité nous fournit qu'elle est constante égale à 1 sur $\mathbb{C}$.

— Cette extension permet **d'unifier la trigonométrie circulaire et la trigonométrie hyperbolique.** En effet, pour tout complexe z, $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$ et $\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)$. C'est la raison pour laquelle les formules de trignométrie hyperbolique sont si semblables à celles de la trigonométrie circulaire.

Exemple

Montrer que la fonction $f(x) = e^x \cos(3x)$ est DSE sur $\mathbb{R}$ par deux méthodes.

III.6 Développements provenant de $(1+x)^\alpha$

l'égalité suivante prouvée précédemment doit être connue :

$$\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \, \forall\, x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}$$

Dans cette formule, le coefficient $\binom{\alpha}{n}$ est défini par la formule $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. Notons qu'ici on ne suppose pas que α est un entier. Cette notation généralise donc les coefficients binomiaux.

Voici un exemple d'utilisation de cette formule :

Montrons que arcsin est DSE en 0 et que :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \right) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

III.7 Un contrexemple

Contrairement à l'intuition donnée par les formules de Taylor, on a le résultat suivant :

Proposition

Il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ non DSE.

Considérons f la fonction suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \exp -{}^1\!/x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

f est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Si f était développable en série entière en 0, f serait nulle sur un voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas.

III.8 Méthode théoriques

Comment démontrer qu'une fonction est développable en série entière ?
En pratique, on utilise les DSE des fonctions usuelles étudiées ci-avant, et les opérations sur les séries entières. Il peut cependant arriver que l'on soit devant un problème théorique, ou bien une fonction qui ne rentre pas dans le cadre précédent. Comment procéder dans ce cas ? Cette questions peut être difficile : nous ne disposons en toute généralité que d'un seul argument :

Théorème

Soit f une fonction de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]-\alpha, +\alpha[$. Notons R_n son reste de Taylor.

Alors f est DSE sur $]-\alpha, \alpha[$ si et seulement si la suite de fonctions (R_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]-\alpha, \alpha[$.

Rappelons que le reste de taylor est défini par la formule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

nous avons deux outils pour étudier le reste de Taylor :

a) Son expression intégrale

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$$

b) sa majoration (inégalité de Taylor Lagrange)

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[0,x]} |f^{n+1}(t)|$$

Preuve :

L'exemple qui suit est typique

Exemple.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I, voisinage de 0. On suppose qu'il existe $M > 0$ tels que $\|f\|_\infty \leqslant Mn!$. Alors f est DSE au voisinage de 0.

III.9 Utilisation du théorème d'intégration terme à terme

Il est fréquent d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour justifier qu'une fonction est développable en série entière.

Exemple. La fonction Γ est développable en série entière au voisinage de 1.

IV Compléments et applications

IV.1 Utilisation du théorème d'unicité

Résolution de récurrences – Dénombrement

Idée : Supposons que l'on connaisse une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

— on lui associe $f : x \longmapsto \sum u_n x^n$

— on traduit la récurrence en une "propriété" de f

— on détermine f, puis (u_n)

Exemple Résoudre la récurrence : $u_{n+1} = u_n + u_{n_1}$ à l'aide de séries entières.

Exemple (Les nombres de Catalan)**.** Déterminer la suite (u_n) vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \end{cases}$$

La suite de cette section est consacrée à des résultats hors programme, mais classiques. Il est souhaitable de les avoir compris.

IV.2 Etude au bord des séries entières positives

Nous avons déja rencontré le théorème d'Abel radial qui donne une indication lorsque x tend vers R. Voici deux autres résultats analogues.

Proposition

Soit $f : x \longmapsto \sum a_n x^n$ une série entière de rayon R. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$. Alors, on a les alternatives suivantes :
- Soit $\sum a_n R^n$ converge et alors f est continue sur en R (c'est le théorème d'Abel)
- Soit $\sum a_n R^n$ diverge et alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Proposition Sommation des relations de comparaisons de séries entières divergentes

Soit (a_n) et (b_n) deux suites positives. On suppose :
- $a_n \sim b_n$
- les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont de rayon 1
- $\sum a_n$ diverge

Posons $f_a : x \longmapsto \sum a_n x^n$ et $f_b : x \longmapsto \sum b_n x^n$. Alors :

$$f_a(x) \underset{1}{\sim} f_b(x)$$

Exemple. À l'aide de la propriété précédente, trouver un équivalent quand x tend vers 1 de

$$u(x) = \sum_{1}^{\infty} \ln n \cdot x^n$$

IV.3 Séries entières de la variable complexe

Fonctions analytiques

Proposition

Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon R. La fonction associée est définie et continue sur $\mathcal{D}(0, R)$.

Étude le long d'un cercle

Soit $r < R$. Le cercle $\mathcal{C}(0, r)$ est paramétré par $t \longmapsto re^{it}$.

Proposition (Formule intégrale de Cauchy)

Soit $f : z \longmapsto \sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

$$\forall\, r < R,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, \mathrm{d}t$$

La preuve de cette formule est laissée en exercice, en tant qu'application du théorème d'intégration sur un segment. Le résultat qui suit est une application simple mais spectaculaire de la formule intégrale de Cauchy :

Proposition

Soit f une série entière de rayon infini. On suppose que f est bornée, alors f est constante.

IV.4 Développement en série entière en $x_0 \neq 0$

Proposition

Soit $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon R. Alors, f est développable en série entière au voisinage de tout x_0 tel que $|x_0| < R$

Démonstration

On prend $R - |z_0| = r$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < r$, en appliquant la formule du binôme on trouve que :

$$f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} z^k \right)$$

Le lecteur aura l'honneur de vérifier que le théorème de Fubini s'applique, ce qui conclut en intervertissant les sommations.

IV.5 Preuve du théorème de convergence radiale

Théorème de convergence radiale d'Abel

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon R. Si $\sum a_n x^n$ converge en $x = R$, alors cette série converge uniformément sur $[0, R]$ et est donc continue sur $[0, R]$.

Démonstration

On se ramène au cas $R = 1$ par renormalisation. On note $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Soit $x \in [0, 1[$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k x^k \end{aligned}$$

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad R_n(x) = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k (x^{k+1} - x_k)$$

Soit $\epsilon > 0$. (r_n) tend vers 0, donc il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|r_n| \leqslant \epsilon$. Ainsi, pour $n \geqslant N$,

$$|R_n(x)| \leqslant \epsilon + \epsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} (x^k - x^{k+1}) \leqslant 2\epsilon$$

On a montré que (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$, donc la série entière est continue sur ce segment.

V Annexe. Notions sur les séries formelles

Cette section présente brièvement l'aspect algébrique des séries entières.

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On note $\mathbb{K}[[X]] = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mid \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{K}\}$ muni des lois suivantes :
- $(a_n) + \lambda(b_n) = (a_n + \lambda b_n)$
- $(a_n) * (b_n) = (c_n)$ avec $c_n = \sum\limits_{p+q=n} a_p b_q$

Muni de ces lois, $\mathbb{K}[[X]]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. On note $1 = (\delta_{n,0})_n$ et $X = (\delta_{n,1})_n$. Alors 1 est le neutre pour la multiplication, et $X^i = (\delta_{n,i})_n$. On adopte alors pour désigner la suite (a_n) la notation :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n X^n$$

Remarque. $\mathbb{K}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}[[X]]$ engendrée par les X^n.

Proposition

$\sum a_n X^n$ est inversible dans $\mathbb{K}[[X]]$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Si S est une série entière non nulle, alors on note $\nu(S) = \min\{k, k \neq 0\}$ la valuation de S. On a la propriété $\nu(S * S') = \nu(S) + \nu(S')$. Si S est non inversible $\nu(S) + \nu(S^{-1}) = \nu(1) = 0$. Ainsi $\nu(S) = 0$, et $a_0 \neq 0$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $a_0 \neq 0$, on cherche à avoir :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n\right)$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_n b_0 + \cdots + a_0 b_n = 0 \end{cases}$$

Comme $a_0 \neq 0$, on peut construire une telle suite (b_n) par récurrence.

Il est intéressant de noter que la question du rayon de convergence n'intervient pas ici. L'analyse apparaît si l'on considère par exemple la sous-algèbre (notons la $\mathcal{A}_R$) des séries de rayon supérieur ou égal à R. (il est facile de voir que c'est une sous-algèbre). Dans ce cas l'application

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n X^n \mapsto (x \in]-R, R[\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n)$$

constitue un morphisme injectif d'algèbres.
Cette remarque est à la base du théorème affirmant que si f est une fonction DSE au voisinage de 0 non nulle en 0, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi DSE. Il "suffit" (mais ce n'est pas très facile!!) de démontrer que le rayon de la série inverse formelle est non nul.
Dans le même ordre d'idée on peut définir formellement , si $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n X^n$ est une série formelle et $T = \sum_{k=1}^{+\infty} b_n X^n$ une série nulle en 0 ($b_0 = 0$) , la série formelle $S \circ T$, prolongeant la composition des polynômes. Si on sait démontrer que la composée de deux séries de rayon non nul est aussi de rayon non nul (c'est vrai, mais là encore non trivial) alors on obtient que la composée de deux fonctions DSE en 0 est aussi DSE en 0.