Probabilités

I Axiomatique des probabilités (Kolmogorov)

I.1 Tribus ou σ-algèbre

Définition

Soit Ω un ensemble (appelé l'univers). Une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω est un sous-ensemble $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ayant les propriétés suivantes :

i. $\Omega \in \mathcal{A}$

ii. $E \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{E} \in \mathcal{A}$

iii. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors leur réunion appartient à A

Vocabulaire.
- On note généralement un tribu $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{T}$.
- Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés "événements".
- $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle un espace probabilisable.
- Dans l'axiome (iii), on peut indexer par n'importe quelle ensemble au plus dénombrable.

Explication du formalisme dans le jeu de pile ou face : On souhaite modéliser une expérience aléatoire, par exemple, tirer indéfiniment à pile ou face (en notant 0 pour pile et 1 pour face).

-Un "aléa" est l'un des résultats possibles de cette expérience : c'est à dire ici :

-L'univers est l'ensemble des résultats possibles, c'est à dire qu'ici $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Généralement, l'univers est trop complexe pour être décrit.
- Les événements sont certains sous-ensemble de résultat. Par exemple, $B =$ [le premier tirage est pile] est un événement. C'est un sous ensemble de Ω. ici :

I.2 Exemples de tribus

Il existes deux tribus dites triviales :
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Lorsque Ω est fini, on utilise systématiquement la deuxième.
Le résultat suivant est immédiat :

Proposition (intersection)

L'intersection quelconque de tribus est une tribu.

Ceci justifie la définition ci-après (hors programme)

Définition

Soit B une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On note $\mathcal{T}(B)$ la tribu engendrée par B, définie ainsi :

$$\mathcal{T}(B) = \bigcap_{\substack{A \text{ tribu} \\ A \supset B}} A$$

C'est la plus petite tribu qui contient B

Exemple. Si par exemple, si on prend un sous ensemble Ω_1 de Ω. Quelle est la plus petite tribu contenant Ω_1 ?

I.3 Propriété des événements et vocabulaire

— Ω s'appelle l'événement certain.

— $\emptyset$ s'appelle l'événement impossible.

— Si E est un événement,$\overline{E}$ s'appelle 'événement contraire de E.

— Deux événement sont dits incompatibles lorsque leur intersection est vide.

— On dit qu'un famille finie ou dénombrable $(E_n)_{n\in I}$ est un système complet d'événements lorsque $\bigcup_{n\in I} E_n = \Omega$ et que les E_n sont deux à deux incompatibles.

I.4 Manipulation d'événements

De la définition on déduit immédiatement que

Proposition

Si $(E_n)_{n\in I}$ une famille finie dénombrable d'événements. Alors :

$$\bigcap_{n\in I} E_n$$

et

$$\bigcup_{n\in I} E_n$$

sont aussi des événements.

Remarque. De façon informelle, toute succession finie ou dénombrable d'opérations sur les événements, à base de $\cup$ et de $\cap$, définit un événement.

Manipulation de quantificateurs :
Le vocabulaire des événements transforme en intersections et réunions les assertions quantifiées, en vertu de la constatation suivante :

"les quantificateur $\forall$ sont associés à des intersections, les quantificateur $\exists$ sont associés à des réunions."

Voici des exemples de cette situation.

Exemple. Dans un jeu de pile ou face, on note $E_n =$ [le $n$ième tirage est pile]
Montrer que les ensembles suivants sont des événements :

-$F =$ [tous les tirages pairs sont des pile]
-$G =$ [exactement un des tirage est pile]
-$H =$ [si on tire une fois pile, alors tous les tirages suivants sont aussi des pile]

L'exemple qui suit est plus subtil :

Exemple. limites supérieures et inférieures d'une famille d'événements
Soit $\mathcal{A}$ une tribu, et soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de E. On note $S =$ [une infinité de E_n sont réalisés] . Alors S est un événement (appelé la limite supérieure des E_n).
En effet, si on note

$$B_n = \bigcup_{k\geqslant n} E_k$$

Alors

$$S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} E_k$$

Noter que toutes les intersections et réunions faites portent sur des familles dénombrables d'ensembles.

De même si on note $I =$ [tous les E_n sont réalisés à partir d'un certain rang], alors I est un événement(la limite inférieure de (E_n)) : prendre le temps d'écrire cet événement avec les symboles intersection et réunion.

I.5 Indicatrice

Si A est un événement , on définit $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A :

$$\mathbb{1}_A : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0\text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Remarquons que si A et B sont deux événements, alors $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$, que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ et que $1 - \mathbb{1}_{A\cup B} = (1 - \mathbb{1}_A) \times (1 - \mathbb{1}_B)$, ce qui rendra très utile les indicatrices pour les calculs.

On démontrera de plus que $E(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

II Probabilité sur un espace probabilisable

II.1 Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une probabilité (ou loi de probabilité) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ vérifiant :

i. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments incompatibles, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n)$$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Remarque.

— En prenant $E_0 = \Omega$ et $E_n = \emptyset$ pour $n > 0$, on obtient $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

— L'axiome (ii) s'appelle **l'axiome de σ-additivité.** Il est aussi vrai une famille $(E_n)_{n\in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ fini : il suffit de la compléter avec $E_n = \emptyset$ pour $n \in \mathbb{N} \backslash J$. Il est également vrai pour toute famille au plus dénombrable :

— Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'événements incompatibles, on déduit de (ii) que : la famille $(\mathbb{P}(E_i))_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$$

II.2 Propriétés finies

Proposition

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on considère A, B et $A_1, ..., A_n$ des événements.

i. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

ii. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

iii. Inégalité de Boole. Pour toute famille fine d'événements on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n)$$

iv. La formule du crible :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Démonstration.

II.3 Continuité monotone

Proposition (Continuité croissante)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille croissante pour l'inclusion d'événements. On pose $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Cette propriétés est d'une importance capitale pour la suite, et contrairement à l'intuition elle n'est pas du tout évidente.

Proposition

Si (A_n) n'est pas croissante, on a tout de même :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Proposition (Continuité décroissante)

Soit (A_n) une suite décroissante d'événements. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Proposition

Si (A_n) n'est pas décroissante, on a tout de même :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

II.4 Autres propriétés dénombrables

Proposition (Inégalité de Boole)

Pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \in [0, +\infty]$$

Proposition (décomposition sur un système complet)

Soit (A_n) un système complet d'événements. Alors pour tout $B \in \mathcal{A}$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

II.5 Événements presque sûrs, événements négligeables

dans cette section, on introduit de nouveaux objets qui n'existaient pas dans les probabilités finies et qui vont jouer un grand rôle.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit E un événement. On dit que E est négligeable lorsque $\mathbb{P}(E) = 0$ et que E est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(E) = 1$.

Proposition

- Toute réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.
- Toute intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

Exemple. On joue à pile ou face une infinité de fois avec une pièce équilibrée.
Démontrer que les événements suivants sont négligeables ou presque surs.

$F =$ [on tire au moins une fois pile]
$G =$ [on tire un nombre fini une fois pile]
$H =$ [on tire un nombre infini de pile et un nombre infini de face]

II.6 Systèmes quasi complet d'événements

Une famille (A_n) eest un système quasi complet d'événements, si les A_i sont disjoints et $\cup A_i$ est presque sur.
Si l'on dispose d'un tel système alors la formule : pour tout $B \in \mathcal{A}$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

reste valide. (les événements négligeables ne comptent pas pour les probabilités)

II.7 Exemples de lois de probabilités

Loi uniforme sur un univers fini

Lorsque Ω est fini, on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour un événement (sous ensemble) E, on pose :

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}}$$

Alors :

Proposition

$\mathbb{P}$ est une loi probabilité appelée loi uniforme. Tous les singletons sont équiprobables.

Exemple : loi uniforme sur un dé, sur un jeu de carte.

Les lois uniformes sont les plus naturelles, mais pas les seules (et heureusement). Le résultat suivant donne la forme générale des lois de probabilité sur un univers fini.

Loi quelconque sur un univers fini

Proposition

Soit $\Omega = \{\omega_1, .., \omega_n\}$. Soit $(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exemple : On joue trois fois à pile ou face. On compte le nombre de pile obtenu : ceci fournit sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ une loi de probabilité qui n'est pas uniforme.

Supposons maintenant l'univers infini, la situation est différente. on est en particulier confronté à une difficulté : **il n'existe pas de loi uniforme.**

Probabilité discrète sur un univers dénombrable

Dans ce paragraphe, $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un univers dénombrable. On le munit de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (qui elle n'est pas dénombrable). Le théorème ci dessous caractérise les lois de probabilités sur $(\omega, \mathcal{A})$.

Théorème

— Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs sommable et de somme 1. Alors il existe une unique loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour tout n on ait $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$.

— Réciproquement, si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, alors $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1$.

Vocabulaire : la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi quelquefois indexée $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ elle est appelée la **distribution de probabilité discrète**, ou le germe de probabilité.

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ $\Omega = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \{\omega_i\}$ est une union disjointe dénombrable donc $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On note $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$. On a alors, par σ-additivité :

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

Ceci détermine la fonction $\mathbb{P}$. On vérifie ensuite que $\mathbb{P}$ définie ainsi est bien une probabilité sur Ω. L'axiome $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ vient du fait que la famille a pour somme 1. L'axiome de σadditivité est une conséquence immédiate du théorème de Fubini positif.

Exemple. Existe-t-il une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(\{n\})$ soit proportionnel à $\frac{1}{n}$? et à $\frac{1}{n!}$?

Sur un univers indénombrable

Sur les univers non dénombrables, **l'existence de tribus ayant des propriétés requises sera toujours admise.** C'est par exemple le cas du jeu de pile ou face infini examiné précédemment. En effet, dans ce cas, L'univers est l'ensemble des suites infinies de $0, 1$. On peut démontrer que cet ensemble n'est pas dénombrable.

III Conditionnement–Indépendance

Dans tout cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

III.1 Conditionnement

Définition

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$, avec B non négligeable. On appelle probabilité de A conditionnellement à B, que l'on note $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$, la quantité :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition

$\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ est une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée loi conditionnelle relativement à B.

III.2 Les trois formules des probabilités conditionnelles

La formule des probabilités totales

Proposition

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements, fini ou dénombrable. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$. Alors, pour tout $B \in \mathcal{A}$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$$

Remarque. S'il y a des A_n négligeables dans la suite, alors $\mathbb{P}_{A_n}(B)$ n'est pas défini, mais $\mathbb{P}(A_n \cap B) = 0$. On considère donc que $\mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n) = 0$ ce qui permet d'écrire la formule.

utilisation : On utilisera cette formule lorsque apparaissent des disjonctions de cas.

Exemple1
On lance un dé jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les dés tirés soient pairs ?

Exemple 2 On suppose que les naissance Fille Garçons sont équiprobables et que la probabilité de l'événement $A_n = $ [avoir n enfants] est de $p_n = p(1-p)^n$. Calculer la probabilité de l'événement $B = $ [avoir deux garçons].

On trouve $P(B) = \frac{2p(1-p)^2}{(1+p)^3}$

La formule des probabilités composées

Proposition

Soient $A_1, ..., A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots A_n) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Utilisation : cette formule est utile lorsqu'il y a des <u>choix successifs</u>

Exemple. Soit (a_n) une famille d'entiers. On part d'une urne contenant $n_1 = 1$ boules noires et $b_1 = 1$ boule blanche. On répète l'expérience suivante : Au $i^{\text{ième}}$ tirage, on tire une boule, si elle est noire on s'arrête, sinon on rajoute 1 boule blanche. On note B_k l'événement : le jeu s'arrête au $k$ième tirage. .

i. Calculer la probabilité de B_k

ii. Calculer la probabilité que le jeu termine

iii. Même question si on rajoute 2^i boules blanches après le $i$eme tirage.

La formule de Bayes

La formule de Bayes a pour but <u>d'inverser le conditionnement.</u> Elle est peu utile dans le programme de MP.

Proposition

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements, soit A un événement, alors :

$$\mathbb{P}_A(B_n) = \frac{\mathbb{P}_{B_n}(A)\mathbb{P}(B_n)}{\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}_{B_k}(A)\mathbb{P}(B_k)}$$

Exemple. Une maladie touche en moyenne 1 personne sur 10000. Un test permettant de déceler cette maladie existe. Celui-ci est positif pour 99% des individus malades, et pour seulement $0,1\%$ des individus sains.

i. Un patient fait le test, celui-ci est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ? (on trouve quasiment 1/2)

ii. Pour confirmer le premier résultat, le patient refait le test, qui est encore positif. Quelle est la nouvelle probabilité qu'il soit malade ? (cela revient à considérer l'événement A' consistant en 2 tests positifs consécutifs. on trouve quasiment 1 cette fois).

III.3 Indépendance

Cas de deux événements

Définition

Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. On dit que A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Notation : on note parfois $A \perp\!\!\!\perp B$ pour signifier que les événements A et B sont indépendants.

Remarque. -Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

- si A est presque sur, alors il est indépendant de tout événement.
-Si A est indépendant de lui même alors il est presque sur ou négligeable.
-Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ aussi.

Exemple
On tire 2 dés. On considère les événements suivants :
— $A =$ [le premier dé est pair]
— $B =$ [le second dé est pair]
— $C =$ [la somme est paire]
Etudier leur indépendance deux à deux.

Cas général

Définition

Soit (A_n) une famille dénombrable d'événements. On dit que les A_n sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, (i_1, ..., i_k) \in \mathbb{N}^k,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} A_{i_j}$$

Proposition

Si les A_n sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux. La réciproque est fausse.

Exemple. On reprend l'exemple précédent
— $A =$ [le premier dé est pair]
— $B =$ [le second dé est pair]
— $C =$ [la somme est paire]

Vérifier que ces trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.
‘

Il est intéressant de noter qu'on a une analogie avec l'indépendance linéaire . Ce qui se produit ici est que l'événement C est obtenu à partir de A et B par intersections reunions et complémentaires, autrement dit, il est dans la tribu engendré par A et B.

Propriétés

Proposition

Passage au complémentaire :
Soit (A_n) une famille d'événements, et soit (B_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ($B_n = A_n$ ou $B_n = \overline{A_n}$). Alors les A_n sont mutuellement indépendants si et seulement si les B_n sont mutuellement indépendants.

Coalitions finies :
Soit I fini, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants, et soit $J_1 \cup \cdots \cup J_r$ une partition de I. On pose $B_k = \bigcap\limits_{i\in J_k} A_i$. Alors $(B_1, ..., B_r)$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Intersections infinies.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements mutuellement indépendants et I, J une partition de $\mathbb{N}$. On note $B_1 = \bigcap_I A_i$ et $B_2 = \bigcap_J A_i$. Alors B_1 et B_2 sont indépendants.

Démonstration.

Par passage au complémentaire, les résultats sont vrais pour les réunions. En fait les résultats ci-dessus sont un cas particulier du théorème suivant qui bien que hors programme peut être utilisé :

Proposition (Lemme des coalitions, HP)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. On considère deux sous-familles disjointes $(A_n)_{n\in I_1}$ et $(A_n)_{n\in I_2}$. On note $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les tribus engendrées par ces familles, respectivement. Alors si $B_1 \in \mathcal{A}_1$ et $B_2 \in \mathcal{A}_2$, B_1 et B_2 sont indépendants.

Cela signifie que tout événement construit "à partir des $(A_n)_{n\in I_1}$" est indépendant de tout événement construit "à partir des $(A_n)_{n\in I_2}$"

III.4 Indépendance dans le jeu de pile ou face

On modélise le pile ou face par l'univers $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition (admise)

Soit $p \in [0, 1]$. On peut munir Ω d'une tribu $\mathcal{A}$ contenant les événements $A_k =$ [le $n^{\text{ième}}$ tirage est pile] et d'une probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

i. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = p$

ii. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

IV Annexe : Rappels sur les cardinaux usuels

Dans les univers finis munis de la loi uniforme, les problèmes de probabilité se ramènent à des problèmes de dénombrements.
Il faut donc connaître les cardinaux de référence.

Ensemble	Cardinal
$\mathfrak{S}(E)$	$\|E\|!$
F^E	$\|F\|^{\|E\|}$
$E_1 \times \cdots \times E_n$	$\|E_1\| \times \cdots \times \|E_n\|$
$\bigsqcup\limits_{i \in I} A_i$ disjointe	$\sum\limits_{i \in I} \|A_i\|$
$\bigcup\limits_{i \in I} A_i$	$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \|(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\|$
$\{f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ injective$\}$	$\frac{n!}{(n-p)!}$
$\{f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ strictement croissante$\}$	$\binom{n}{p}$
$\{f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$ croissante$\}$	$\binom{n+p-1}{p}$
$\{(a_1, ..., a_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \ , \ a_1 + \cdots + a_p = n\}$	$\binom{n-1}{p-1}$
$\{(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{N}^p, \ a_1 + \cdots + a_p = n\}$	$\binom{n+p-1}{p-1}$

On peut également connaître et savoir redémontrer les deux formules suivantes :

Van der Monde :

$$\sum_{p+q=k} \binom{a}{p} \binom{b}{q} = \binom{a+b}{k}$$

Multinôme à p termes :

$$\sum_{k_1 + \ldots + k_p = n} \frac{n!}{k_1! \ldots k_p!} z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p} = (z_1 + \ldots + z_p)^n$$

Voici quelques exemples de problèmes de dénombrement utilisant les formules du tableau :

Exemple. Utilisation de la formule de Poincaré :

Dénombrer les dérangements de S_n c'est à dire les permutations sans point fixe.

Exemple. Utilisation d'une bijection judicieuse :

Démontrer la formule de la dernière ligne du tableau ci-dessus en utilisant celle de l'avant dernière ligne.

Combien y a-t-il de façons de placer p prospectus dans n boîtes aux lettres ?

Combien y a t'il de chemins reliant le point $(0, 0)$ au point (p, q) utilisant des déplacements d'un case vers le haut ou vers la droite ?

Exemple. Tirages sans remise (jeu de carte par exemple, utilisation de coefficients binomiaux.)

Déterminer le nombre de mains de 5 cartes d'un jeu de 52 qui contiennent :

une paire exactement (1098240)
deux paires exactement (123552)
un brelan (54912)
une suite (5 cartes consecutives pas forcément de la meme couleur, pas toutes de la même couleur) (9180)
un full (3744)
un carré (624)
une quinte flush suite à la même couleur (36)

Le problème des anagrammes :
On dispose d'un jeu de p lettres, dans lequel la lettre numéro i apparait m_i fois. Combien de mots différents pouvons-nous former en utilisant toutes les lettres ?

Exemple. Tirages avec remise. (problèmes d'urnes)

Les successions de Laplace : on se donne $n+1$ urnes numérotées de 0 à n. L'urne U_k contient k boules noires et $n-k$ blanches.
On choisit aléatoirement U_k une urne dans laquelle sont faits tous les tirages avec remise. On note B_m l'événement les m premiers tirages sont blancs et E_k l'événement l'urne tirée est U_kDéterminer les limites quand m tend vers l'infini de $P(B_m|B_{m-1})$ et $P(E_k|B_m)$.

Exemple. Utilisation de récurrences.

Déterminer le nombres de suites de longueur n ne contenant que des 0 et des 1 mais ne contenant deux 1 successifs.

Exemple. Utilisation de série génératrice :

On note p_n le nombre de permutations$f$ qui alternantes c'est à dire tel que la suite $(f(i))_{1\leq i\leq n}$ n'ait pas trois termes consécutifs rangés dans le même sens.
Montrer que $2p_{n+1} = \sum_0^n \binom{k}{n} p_k p_{n-k}$
Montrer que la série $\sum \frac{p_n}{n!} x^n$ a pour somme $\tan x + \frac{1}{\cos x}$ et en déduire une méthode de calcul de p_n