Probabilités(1).

Un peu d'histoire : La légende du prix nobel. Il ne vous aura pas échappé qu'il n'y a pas de prix nobel de mathématique. Il existe depuis 1932 pour le remplacer une autre distinction appelée médaille Fields (du nom d'un mathématicien canadien et fortuné) qu'on décerne tous les 4 ans à un ou plusieurs mathématicien de moins de 40 ans.On compte à ce jour une soixante de lauréats dont treize francais (les derniers en date s'appellent Hugo Duminil-Copin (2022) et Artur Avila (2014), ce dernier étant Franco Brésilien).Mais pourquoi donc n'y a t'il pas de prix nobel en mathématiques ? La légende (sans doute fausse) raconte qu' Alfred Nobel, trop occupé par la fabrication de ses fameux batons de dynamite, délaissait un peu trop son épouse. Celle-ci aurait alors trouvé consolation auprés de Gosta Mittag-Lefler, qui était (outre ses talents de séducteur) un trés brillant mathématicien (le meilleur que la suède ait jamais eu, spécialiste des fonctions de la variable complexe) et qui aurait pu prétendre au prix s'il était créé. Ne voulant pas risquer de couronner son rival, Nobel préféra s'abstenir !

Généralités. Evénements, probabilités, variables aléatoires

1. Quelle est la tribu engendrée par les singletons de $\mathbb{R}$? (c'est à dire la plus petite tribu qui contient les singletons.
2. Généralités sur les tribus :
   (a) Montrer qu'une intersection quelconque de tribus est une tribu.
   (b) Soit $\mathcal{T}$ une tribu, et B un élément de $\mathcal{T}$.
   Montrer que l'ensemble de $A \cap B, A \in \mathcal{T}$ est une tribu.

3. Si (A_n) et (B_m) sont deux systèmes complets d'événements, que dire de la famille des $(A_n \cap B_m)_{n,m}$?
4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements indépendants tels que $P(A_n) = \dfrac{1}{(n+2)^2}$

   a) Déterminer la probabilité de $A = \bigcup_n^{\infty} A_n$

   b) On note B l'événement : exactement un des A_n est réalisé. Montrer que B est bien un événement et calculer sa probabilité.
5. soient A, B deux événements d'un espace probabilisé. Comparer $P(A \cup B)P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$.

6. Inégalité de Bonferroni.
   (a) Soient $(A_1.....A_n)$ une famille finie d'événements. Montrer que
   $$P(\bigcup_1^n A_k) \geq \sum_1^n P(A_k) - \sum_{n\neq m} P(A_n \cap A_m)$$
   (b) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'événements tels que pour tout $i \neq j$ l'événement $A_i \cap A_j$ est négligeable. Démontrer que $\sum_i P(A_i) = P(\bigcup_i A_i)$

   indication : commencer par le cas $n = 2$ puis faire une récurrence
7. (X) Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ on appelle , sous réserve d'existence, densité de A le réel $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|A \cap \{1,..,n\}|}{n}$
   On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties ayant une densité.

   (a) Donner des exemples de parties infinies ayant une densité nulle, une densite $1/2$
   (b) Montrer que $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$
   (c) $\mathcal{L}$ est il une tribu ? μ est elle σ additive ?
   (d) Existe-t'il une tribu sur $\mathbb{N}$ contenant $\mathcal{L}$ et une probabilité dont μ soit la restriction à $\mathcal{L}$?

8. Le paradoxe du singe.
   Soit N le nombre de caractères d'un roman figurant au programme des concours des classes prépatoires scientifiques.
   Plaçons un singe devant un clavier d'ordinateur comportant 100 touches (c'est le nombre de touches moyen d'un ordinateur portable). On suppose que le singe frappe les touches du clavier aléatoirement, et de façon indépendante.

   Notons A_n l'événement :" le singe écrit le texte du roman entre les frappes nN et $nN + N - 1$".

   a) Justifier que les A_n sont indépendants et calculer $P(A_n)$
   b) En déduire la probabilité de l'événement B : " le singe écrira (au moins une fois) le roman dans son intégralité"

9. Le lemme de Borel Cantelli.

On considère une suite $(A_n)_{n>0}$ d'événements. On appelle B l'événement "une infinité de A_n sont réalisés". B s'appelle la limite supérieure de la suite (A_n).

(a) Pour tout n on note $B_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$. Vérifier que $B = \bigcap_{n>0} B_n$.

(b) Dans cette question on suppose que la série $\sum P(A_n)$ est convergente.
Majorer $P(B_n)$, puis démontrer que $P(B) = 0$.

Dans Les deux questions suivantes on suppose que la série $\sum P(A_n)$ est divergente et que les événements (A_n) sont mutuellement indépendants

(c) Etablir l'inégalité $\prod_{k=1}^{n} (1 - P(A_i)) \leq \exp(-\sum_{1}^{n} P(A_i))$

(d) En déduire que $P(\bigcup_{m \geq 0} A_m) = 1$ puis que $P(B) = 1$

C'est le lemme de Borel Cantelli, qui établit que l'événement B ne peut avoir que 0 ou 1 selon le comportement de la série $\sum P(A_n)$. *Ce résultat important possède de nombreuses applications.*

10. Inexistence d'une loi de probabilité compatible avec la multiplication.

Cet exercice utilise le lemme de Borel-Cantelli
On admet que la série des inverses des nombres premiers est divergente.
On suppose qu'il existe sur $\mathbb{N}^*$ une probabilité P telle que l'ensemble des multiples de n soit de probabilité $\frac{1}{n}$ pour tout entier n. Soit p_k le $k$ième nombre premier, et soit A_k le sous ensemble des multiples de p_k.

a) Montrer que pour la probabilité P les événements A_k sont mutuellement indépendants.
b) En déduire que l'hypothèse de l'existence de P est fausse.

11. *difficile.* Mesure d'irrationnalité.

Cet exercice utilise le lemme de Borel-Cantelli

On munit le segment $[0, 1]$ de la loi uniforme,c'est à dire de la loi de probabilité telle que tout intervalle ait pour probabilité sa longueur (l'existence de cette loi est admise).

Nous dirons qu'un réel x est approchable à l'ordre α s'il un existe un réel M et une suite de rationnels $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ (avec q_n tendant vers l'infini) telle que pour tout n on ait $|x - r_n| \leq \frac{M}{q_n^\alpha}$. On se propose de déterminer la probabilité p_α qu'un nombre de $[0, 1]$ soit approchable à l'ordre α. Soit B l'événement correspondant.

(a) Le cas où α est inférieur ou égal à deux.
Soit q un entier non nul.et x un nombre irrationnel.
a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de la forme $[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}]$, pour p entier compris entre 0 et $q-1$, qui contient deux réels distincts de la forme $kx - E(kx)$, k étant un entier compris entre 0 et q.
b) En déduire l'existence de deux entiers r, s avec $s < q$ tels que $|x - \frac{r}{s}| \leq \frac{1}{qs}$
c) Montrer que tout x de l'intervalle $[0, 1]$ est approchable à l'ordre 2, puis à l'ordre α lorsque α est plus petit que 2. On distinguera selon que x est rationnel ou non.

(b) Le cas où $\alpha > 2$.
On note A_q la réunion des intervalles $[\frac{k}{q} - \frac{M}{q^\alpha}, \frac{k}{q} + \frac{M}{q^\alpha}]$ pour k entier entre 0 et q. Etudier la série de terme général $P(A_q)$ et en déduire que $p_\alpha = 0$

Probabilités sur un univers finis. Dénombrements.

12. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On sort les boules une à une de l'urne (sans remise).

    (a) Quelle est la probabilité que les boules numérotées 1, 2 et 3 sortent successivement et dans cet ordre ?
    (b) Quelle est la probabilité que les boules numérotées 1, 2 et 3 sortent successivement ?
    (c) Quelle est la probabilité que les boules numérotées 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre mais pas forcément successivement ?

13. Un facteur doit déposer 7 prospectus dans 10 boites aux lettres nominatives. Calculer le nombre de façons de procéder dans chacune des hypothèses suivantes :

    (a) Les prospectus sont les mêmes et il y en a au maximum un par boite (réponse 120)
    (b) les prospectus sont distincts et il y en a au maximum un par boite (réponse 604800)
    (c) Les prospectus sont distincts et il y en a autant qu'on veut par boite (réponse 10^7)
    (d) Les prospectus sont identiques et il y en a autant qu'on veut par boite (réponse $11440 = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}$)

14. On tire $6n$ fois un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir chaque face exactement n fois ?

15. Le paradoxe des anniversaires.
    Dans une classe de n étudiants, déterminer la probabilité p_n que (au moins) 2 étudiants soient nés le même jour.
    Quel est le plus petit entier n tel que $p_n > \dfrac{1}{2}$?

Manipulations du binôme.

16. Calculer $\displaystyle\sum_0^n \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{k+1}$

17. Calculer $\displaystyle\sum_{X[1,n]} |X|$ et $\displaystyle\sum_{X,Y\subset[1,n]} |X \cup Y|$

18. Loi hyper géométrique.
    On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires.
    On effectue un tirage de n boules ($\max(a, b) \leq n \leq a + b$).

    (a) On note X le nombre de boules blanches tirées. Déterminer de l'événement $X = k$
    (b) En déduire la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ n-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ n \end{pmatrix}$
    (c) Conjecturer la valeur de $E(X)$. Démontrer cette conjecture.

Récurrences et séries génératrices.

19. Partie lacunaires de $[1, n]$.

    On appelle partie lacunaire de $[1, n]$ tout sous ensemble qui ne contient pas deux entiers consécutifs. On note u_n le nombre de parties lacunaires de $[1, n]$.
    a) Montrer que u_{n+2} s'exprime simplement en fonction de u_n et u_{n+1} (on comptera les parties lacunaires de $[1, n+2]$ en distinguant selon que la partie lacunaire contient ou non $n + 2$)
    b) En déduire u_n.

20. Dénombrements et séries génératrices (1).

    Soit I_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments.
    (a) Justifier que $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$
    (b) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ a un rayon non nul et calculer sa somme.

(c) En déduire une formule donnant I_n

21. Dénombrements et séries génératrices (2).

    On note π_n le nombre de partition d'un ensemble à n éléments.

    (a) Montrer $\pi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_k$ (on classera les partitions de $[1, n+1]$ selon le sous ensemble qui contient $n+1$)
    (b) On pose $f(x) = \sum \frac{\pi_n}{n!} x^n$. Montrer que cette série est de rayon non nul(par exemple en montrant que $\pi_n \leq n!$) et vérifier que $f'(x) = e^x f(x)$
    (c) Montrer $f(x) = \frac{1}{e} . e^{e^x}$. Et déduire une autre expression de π_n.

    Exemples de dénombrement de permutations

22. Soit n un entier.
    Déterminer la probabilité qu'une permutation de $\{1, ...2n\}$ possède un cycle de longueur strictement supérieure à n.
    Déterminer la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

23. Nombre de points fixes d'une permutation.

    On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de points fixes d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$

    (a) En écrivant X_n comme une somme d'indicatrices, démontrer que $E(X_n) = 1$
    (b) On note D_n le nombre de permutations sans point fixe. c Montrer que $D_n = n! \sum_{0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ (on pourra utiliser la formule du crible)
    (c) Soit A_k une partie de $\{1, \ldots n\}$ à k éléments. Déterminer le nombre de permutations qui fixent exactement les points de A_k.
    (d) En déduire la loi de X_n
    (e) Convergence quand n tend vers l'infini.

24. Les allumettes de Banach.

    Un fumeur a dans chaque poche une boîte d'allumette qui contient au départ N allumettes . Chaque fois qu'il veut fumer, il choisit une poche au hasard.

    (a) On demande la probabilité $p(x)$ pour que, le fumeur se rendant compte pour la première fois qu'une boite est vide, l'autre boite contienne x allumettes.(réponse : $\binom{2N-x}{N} \frac{1}{2^{2N-x}}$)
    historiquement le problème initial est le suivant : calculer la probabilité pour que le fumeur se retrouve à cours d'allumette, c'est à dire que lorsqu'il constate que l'une des boite est vide, l'autre l'est aussi : c'est le cas $x = 0$

    (b) Dans le cas $x = 0$ déterminer un équivalent de cette probabilité quand N tend vers l'infini et interpréter, sachant qu'il y a environ 50 allumettes dans une petite boite standard.

25. Dans le quadrillage $\mathbb{N}^2$ on appelle chemin croissant tout parcours partant du point $(0, 0)$ et se déplacant sur le quadrillage uniquement vers le haut ou vers la droite.
    On se propose de dénombrer les chemins croissants ayant certaines propriétés.

    (a) Montrer que le nombre de chemins croissants reliant $(0, 0)$ à (p, q) est égal à $\binom{q+p}{p}$. Vérifier que ce nombre est aussi égal au nombre de mots de deux lettres a, b de longueur $p+q$ ayant p fois la lettre a.

    (b) On suppose maintenant que $p > q$ le point (p, q) est donc situé en dessous de la diagonale du quadrillage.
    On se propose de déterminer le nombre de chemins croissants qui relient $(0, 0)$ à (p, q) sans toucher la diagonale (sauf en $(0, 0)$ bien sur).
    Le calcul direct s'avère bien trop compliqué. On a recours à une astuce de dénombrement. Pour cela on note A l'ensemble des chemin qui relient $(0, 0)$ à (p, q) en touchant la diagonale, et $A1$ (resp. $A2$) ceux de ces chemins qui passent par le point $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$).

    i Démontrer, en exhibant une bijection entre les deux ensembles que $A1$ et $A2$ ont le même cardinal. On pourra utiliser un argument géométrique utilisant la symétrie par rapport à la diagonale.
    ii Calculer le cardinal de $A2$
    iii En déduire que le cardinal de A vaut $2 \binom{p+q-1}{p}$

(c) Une application au problème des scrutins.
Deux candidats à une election remportent respectivement p et q suffrages ($p > q$). Déterminer la probabilité pour que, au cours du dépouillement le premier candidat reste constamment en tête.

26. *difficile.* Une utilisation de probabilités pour un problème de dénombrement.
On munit l'ensemble des applications de $E = \{1, \dots, n\}$ dans $\{0, 1\}$ de la probabilité uniforme.

    (a) Soit A une partie de cardinal k. Quelles est la probabilité que $f(A)$ soit un singleton ?

    (b) Montrer que le nombre de progressions arithémiques de longueur k de E est majoré par $\dfrac{n(n-1)}{2}$

    (c) Montrer que si $n < \sqrt{2}^k$, il existe au moins une application f telle que pour tout suite arithmétique de longueur k on ait $f(A) = \{0, 1\}$

Conditionnement et indépendance

27. Un petit calcul.

    Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires.
    On pioche trois boules, on remet les noires et l'on garde les blanches.
    On tire une quatrième boule. Quelle est la probabilité que celle-ci soit blanche ?

28. Un problème de transmission :
N personnes numérotées de 1 à N. La première personne tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Elle dit à son voisin le nom de cette carte qui fait de même avec son voisin et ainsi de suite. A chaque transmission une erreur peut se produire avec une probabilité p (dans ce cas, le nom transmis est aléatoirement celui d'une autre carte du jeu).
Déterminer la probabilité p_N que la Nieme personne reçoive le nom de la bonne carte. Trouver , selon p, la limite de la suite p_N. Commenter le résultat.

29. Loi uniforme.
On munit le segment $[0, 1]$ de la loi uniforme,c'est à dire de la loi de probabilité telle que tout intervalle ait pour probabilité sa longueur (l'existence de cette loi est admise).

    On note A_p l'événement : la $p$ième décimale de x est un 1.

    (a) Calculer la probabilité de A_p

    (b) Etudier l'indépendance mutuelle des événements A_p

30. *difficile.* Indépendance des records.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une permutation s possède un record en i si $\forall j < i, s(j) < s(j)$.

    (a) Montrer que la probabilité de l'événement $E_i =$"avoir un record en i" est égale à $\dfrac{1}{i}$

    (b) Montrer que les E_i sont mutuellement indépendants.

31. On dispose de $N + 1$ urnes $U_0, U_1, \cdots, U_N$. L'urne U_k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On tire une boule de l'une de ces urnes choisie au hasard.

    (a) Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?

    (b) Sachant que la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité de l'avoir tirée de l'urne U_N ?

32. Tirages complets dans une urne.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, n étant un entier naturel non nul. On effectue dans cette urne p tirages avec remise. On dit que le tirage est complet si au cours du tirage tous les numéros sont sortis.
Pour tout $i \in [1, n]$, on note A_i l'événement " la boule numérotée i n'est pas sortie au cours du tirage".

    (a) Soit $k \in [1, n]$. Calculer, pour tous $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, la probabilité $P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right)$.

    (b) En déduire que la probabilité d'obtenir un tirage complet vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (1 - \frac{k}{n})^p$

    (c) Utiliser la formule précédente pour calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) k^p$ pour tout p inférieur ou égal à n.

33. Cent passagers montent à bord d'un avion. Le premier n'a pas sa carte d'embarquement et se place au hasard. Tous les autres passagers ont leur carte d'embarquement. Ils montent successivement et se placent à leur place si elle est libre, au hasard sinon.
Quelle est la probabilité que le centième passager soit bien placé ?
indication : le nombre 100 *est manifestement arbitraire : le remplacer par n, noter p_n la probabilité cherchée et montrer la relation de récurrence* $p_n = \dfrac{1}{n}(1+\sum_2^{n-1} p_k\ )$

34. Urne de Polya.
Une urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.
On note R_n l'événement la n ième boule tirée est rouge.

    (a) Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la deuxième est blanche ?
    (b) On se propose de démontrer le résultat suivant : la probabilité $P(R_n)$ ne dépend pas de n.
    C'est ce résultat à priori paradoxal qui fait l'intérêt de l'urne de Polya.
    i) Vérifier que $P(R_2) = P(R_1)$
    ii) On suppose que le résultat est vrai au rang $n-1$. Que valent $P(R_n|R_1)$? et $P(R_n|\bar{R}_1)$? Conclure.
    (c) On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans l'urne après le $n$ième tirage.
    i) Calculer $P(Bn|B_1B_2...B_kR_{k+1}R_{k+2}...R_{n-1})$
    ii) En déduire la probabilité $P(X_n = b+k)$

35. On tire n fois à pile ou face", avec une pièce à priori quelconque.
On note C_k l'événement : [il y a un changement entre le tirage k et le tirage $k+1$]. Montrer l'équivalence des trois affirmations :
i Les événement $(C_k)_{k=0..n-1}$ sont mutuellement indépendants.
ii Ils sont deux à deux indépendants.
iii La pièce est équilibrée.

36. Une infinité de joueurs, $A_1, A_2, ..., A_n....$ participe à un tournoi de pile ou face équilibré. A_1 affronte A_2 puis le vainqueur A_3 etc.....le jeu s'arrête lorsqu'un joueur a gagné 3 parties successives. Ce joueur est alors déclaré vainqueur.
Soit q_n la probabilité que le joueur A_n participe et p_n celle qu'il gagne.
    (a) Quelle est la relation entre p_n et q_n ?
    (b) Montrer que la suite (q_n) vérifie à partir du rang 5 la recurrence d'ordre 2 ,$q_n = \dfrac{1}{2}q_{n-1} + \dfrac{1}{4}q_{n-2}$ puis calculer q_n.
    indication : on commencera par démontrer que le premier adversaire de A_n est forcément l'un des deux précédents
    (c) Calculer $\sum_0^{\infty} p_n$. Comment interpréter ce résultat ?

37. Un calcul de l'indicateur d'Euler.
On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$ tous les choix étant équiprobables.
Soit p un entier naturel non nul et $\leq n$. Soit A_p l'événement «le nombre choisi est divisible par p»
    (a) Calculer $P(A_p)$ lorsque p divise n.
    (b) Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les événements $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ sont indépendants.
    (c) Montrer que
$$\phi(n) = n \prod_{p \text{ premier } ,p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

38. Considérons le jeu suivant : une urne contient au départ une boule blanche, et on joue à pile ou face avec une pièce non truquée. A chaque fois que l'on obtient face, on rajoute une boule noire dans l'urne et on relance la pièce. quand on obtient pile, on tire une boule dans l'urne et on s'arrete. Calculer la probabilité de tirer la boule blanche.

39. On suppose que p est un réel fixé de $[0, 1]$ qui représente la probabilité qu'un billet de 100 euros soit faux.
On dispose d'un détecteur de faux billets imparfait qui allume une lumière qui est soit bleue lorsqu'il considère que le billet testé est vrai, soit rouge lorsqu'il considère que le billet testé est faux.
On note F : "Le billet testé est faux ", et B : "La lumière qui s'allume est bleue ".
On note $P_B(\overline{F}) = \alpha$ et $P_{\overline{B}}(F) = \beta$, et on suppose dans tout l'exercice que $\alpha + \beta > 1$.
    (a) Montrer que : $P(B) = \dfrac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}$· En déduire que $1 - \alpha \leqslant p \leqslant \beta$.
    (b) Montrer que la probabilité que le détecteur valide un faux billet est : $\dfrac{(1-\alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}$.

40. Si l'on en croit le site internet Santé TN, en france, 5 femme sur 1000 sont daltoniennes, et 8 hommes sur 100. On choisit au hasard une personne daltonienne. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?(réponse :$0, 94$)