Espaces préhilbertiens

1. Un exercice de calcul :
   On donne dans E de dimension 4 muni d'une base orthonormée, les deux vecteurs a, b de coordonnées respectives $(1,0,1,2)$ et $(2,1,0,2)$. Soit F =vect (a,b). Déterminer :
   (a) La projection orthogonale sur F.
   (b) La symétrie orthogonale par rapport à F
   (c) Une base orthonormée de l'orthogonal de F
   (d) La distance du vecteur $(1,0,0,0)$ à F

2. On rappelle que l'application $(A,B) \to \mathrm{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire.
   (a) soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'inégalité $|tr(A)| \leq \sqrt{n\,\mathrm{tr}(AA^T)}$. Etudier les cas d'égalité.
   (b) Vérifier que le supplémentaire orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$ est $A_n(\mathbb{R})$.
   (c) soit T une matrice quelconque. Déterminr la projection orthgonale de T sur $S_n(\mathbb{R})$ et la distance de T à cet espace.

3. Soit E un espace préhilbertien et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n vecteurs de norme 1 de E tels que
$$\forall x \in E, \sum_{k=1}^{n} |(x|u_k)|^2 = \| x \|^2$$
   (a) Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille orthonormée de E.
   (b) Déterminer l'orthogonal du sous espace engendré par $(u_1, \ldots, u_n)$.
   (c) Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée.

4. Déterminant de Gram (à très bien connaître)

   Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace préhilbertien réel. On note :
   -$g(x_1, ..., x_p)$ la matrice de terme général $\langle x_i | x_j \rangle$.
   - $G(x_1, ..., x_p)$ le déterminant de cette matrice.(déterminant de Gram des x_i)

   (a) Montrer que $G(x_1, ..., x_p)$ n'est pas modifié si l'on ajoute remplace x_n par $x_n - \lambda x_i$ pour tout λ réel et tout $i \neq n$.
   (b) On note x'_p la projection orthogonale de x_p sur $vect(x_1, ..., x_{p-1})$.
   Démontrer que $G(x_1, ..., x_p) = G(x_1, ..., x_p - x'_p)$
   En déduire que $G(x_1, ..., x_p) = \left\| x_p - x'_p \right\|^2 G(x_1, ..., x_{p-1})$.
   (c) En déduire :
   (i) $G(x_1, ..., x_p)$ est un réel positif.
   (ii) $G(x_1, ..., x_p) \leq \prod_{1}^{n} ||x_i||^2$ (inégalité de Hadamard)
   (d) Donner l'expression de la distance de x_n à vect$(x_1, ..., x_{n-1})$ à l'aide de déterminants de Gram.
   (e) Démontrer que la matrice $g(x_1, ..., x_p)$ est inversible si et seulement si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est libre.

5. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs unitaires tels que $||x_i - x_j|| = 1$ pour tout $i \neq j$.
   (a) Calculer les produits scalaires $(x_i | x_j)$.
   (b) Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

6. Familles isogonales (généralise le précédent, plus difficile)
   Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs unitaire d'un espace de dimension p formant deux à deux un angle constant θ.
   Montrer que $\cos(\theta) \geq \dfrac{-1}{n-1}$ (on pourra par exemple utiliser un déterminant de Gram).
   Cas d'égalité ?

7. Pour quelles valeurs de a, b l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par $\varphi(M, N) = a\,\mathrm{tr}({}^tMMN + b\,\mathrm{tr}(M)\,\mathrm{tr}(N)$ est elle un produit scalaire ?

8. Familles obtusangles.
   Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs dont les produits scalaires deux à deux sont strictement négatifs .
   On se propose de montrer que le rang de cette famille est au moins égal à $n-1$.
   Pour cela on suppose $\displaystyle\sum_1^{n-1} a_i x_i = 0$ pour des réels a_i
   (a) Démontrer que le vecteur $v = \displaystyle\sum_{i \text{tels que } a_i > 0} a_i x_i = 0$ est nul. (on pourra calculer $||v||^2$
   (b) Conclure en calculant $(v|x_n)$.

9. Problèmes de distance (1) :
   Justifier l'existence de $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi} (1 - a\cos x - b\cos^2 x)^2 dx$ et calculer cette valeur en utilisant le théorème de la projection orthogonale.

10. Problèmes de distance (2) (plus difficile) :
    On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$. On note F le sous espace vectoriel $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
    On se propose de calculer le projeté orthogonal de 1 sur F et la distance $d(1, F)$. Soit $P = \displaystyle\sum_1^n a_i X^i$ ce projeté.
    (a) Soit G la fraction rationnelle $G(Y) = \dfrac{1}{Y+1} - \displaystyle\sum_1^n \dfrac{a_i}{Y+i+1}$. Montrer que G s'annule en $1, 2, \ldots, n$
    (b) En déduire G puis les a_i et $d(1, F)$.

11. Polynômes orthogonaux : un exemple.

    La plupart des produits scalaires utiles sur $\mathbb{R}[X]$ sont définis par des intégrales. En ce sens, l'exercice ci-dessous peut être considéré comme typique du point de vue calculatoire (pour le cas général, voir l'exercice suivant).

    (a) Montrer que sur $\mathbb{R}[X]$ $(P, Q) = \displaystyle\int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est un produit scalaire.
    (b) Justifier que $P_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ est un polynôme de degré n.
    (c) Soit n, m avec $m \leq n$. Montrer que pour tout $k \leq n$ on a :
    $$(P_n|P_m) = (-1)^k \int_0^{\infty} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n e^{-x}) P_m^{(k)}(x)dx$$
    (d) En déduire que la famille de polynômes $(P_n)_n$ est orthogonale pour ce produit scalaire. Calculer la norme de P_n
    (e) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
    (f) En utilisant le théorème des projections, déduire de ce qui précède les valeurs de a, b, c qui rendent minimale la quantité $\displaystyle\int_0^{\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t}dt$.

12. Polynômes orthogonaux : le cas général.

On considère une fonction w strictement positive et continue sur un intervalle I et telles que pour tout polynome la fonction $t \mapsto P(t)w(t)$ soit intégrable sur I (la fonction w s'appelle le poids du produit scalaire).

On pose

$$(P,Q) = \int_I P(t)Q(t)w(t)dt$$

(a) Vérifier que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Justifier sans calcul qu'il existe une unique famille de polynômes (P_n) orthogonale pour ce produit scalaire telle que P_n soit unitaire et de degré n.

Cette famille s'appelle la famille de polynômes orthogonaux relative au poids w. La famille de polynômes (P_n) possède deux propriétés remarqualbes exposées ci-dessous.

(c) Relation de récurrence linéaire d'ordre 2

i. Vérifier pour tous polynômes P, Q la formule $(XP,Q) = (P,XQ)$
ii. En déduire que le polynôme XP_n est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
iii. Déterminer une base orthonomrée de $\mathbb{R}_{n-2}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
iv. Etablir enfin qu'il existe deux suites a_n, b_n telles que

$$P_{n+1} = (X - a_n)P_n - b_n P_{n-1}$$

(d) Racines.

i. On note $a_1, \ldots, a_p$ les racines de P_n qui sont dans l'intervalle I et dont la multiplicité est impaire (il peut ne pas y en avoir à priori, dans ce cas , $p = 0$)
On pose $Q = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$.
Que peut on dire du signe du polynôme $Q \cdot P_n$?
ii. On suppose que $p < n$: calculer (Q, P_n).
iii. Déduire des deux questions précédentes que le polynôme P_n est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans I.

13. Polynômes orthogonaux : Une formule de Parseval.

On garde les notations précédentes. On suppose que l'intervalle $I = [a,b]$ est un segment et que le poids w est continu sur $[a,b]$.
On note $Q_n = \dfrac{P_n}{||P_n||}$. Ainsi la famille (Q_n) est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$.
Pour toute fonction f continue, on pose $s_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)Q_n(t)w(t)dt$.
Montrer que la série de terme général s_n^2 est convergente.
Difficile : calculer sa somme.(cette question utilise le théorème d'approximation de Weierstrass)

14. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \to \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

(a) Existe t'il $A \in \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = (P|A)$?
(b) Existe t'il $A \in \mathbb{R}[X], \forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = (P|A)$?

15. *difficile.* Soient E un espace euclidien de dimension n et $(E_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E. Pour $k\in\{0,\ldots,n\}$, soit $d_k : x\in E \ \mapsto\ d(x,E_k)$.

    (a) Soit $x\in E$. Que peut-on dire de la suite $(d_k(x))_{0\leq k\leq n}$?

    (b) Soit $(\delta_k)_{0\leq k\leq n-1}$ une suite décroissante de réels positifs. Etablir l'existence de $x\in E$ tel que : $\forall k\in\{0,\ldots,n-1\}$, $d_k(x)=\delta_k$.

16. *difficile.* Soit E un espace préhilbertien.
    Soit (p_n) une suite de projecteurs orthogonaux. On suppose que cette suite converge simplement vers p
    a) Vérifier que p est linéaire et que pour tout x on a $||p(x)||\leq||x||$
    b) Montrer que p est un projecteur orthogonal.

17. *difficile.* Soient $(a_1,....,a_n)$ n vecteurs d'un espace préhilbertien. Soit x un vecteur tel que pour tout y tel que $<y,a_1>=<y,a_2>=..=<y,a_n>=0$ on ait $<x,y>=0$. Montrer que $x\in vect(a_1,...,a_n)$.
    Application : soit g une fonction continue sur $[0,1]$ telle que pour toute fonction f telle que $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$ on ait $\displaystyle\int_0^1 f''(t)g(t)dt=0$. Montrer que g est une fonction affine.

18. *difficile.* Théorème des projections sur un convexe fermé. Ce théorème est un des fondamentaux de l'analyse fonctionnelle.
    Soit E un espace préhilbertien complet (c'est à dire, dans lequel toute suite de Cauchy est convergente. Un tel espace s'appelle un espace de Hilbert)
    Soit C une partie non vide de E convexe et fermée. Pour tout vecteur x on note $d(x,C)$ la distance de x à C.

    a) Montrer qu'il existe une suite (x_n) de C telle que $||x-x_n||$ tend vers $d(x,C)$
    b) Montrer que la suite (x_n) est de Cauchy. Indication : exprimer $||x_n-x_m||^2$ en fonction de $||x-x_n||,||x-x_m||,||x-(x_n+x_m)/2||$
    c) En déduire l'existence puis l'unicité du vecteur $p(x)\in C$ tel que $d(x,C)=||x-p(x)||$.
    $p(x)$ s'appelle la projection de x sur C (attention, ce n'est une application lineaire que lorsque C est un espace vectoriel)
    d)Application 1 : démontrer que si F est un sev fermé, alors on a $F\oplus F^{\perp}=E$
    e)Application 2 : soit f une forme linéaire. Montrer que f est continue si et seulement si il existe un vecteur y tel que pour tout x, $f(x)=<x,y>$ (on a donc un isomorphisme canonique entre E et son dual topologique)
    f) Démontrer que l'espace $l^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert.

    Montrer que si de plus on suppose que E est complet, alors ϕ est surjective.