Endomorphismes des espaces euclidiens

Dans tout le chapitre, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien, c'est à dire rappelons le un espace préhilbertien réel de dimension finie.

I Adjoint d'un endomorphisme

I.1 Théorème et définitions

Théorème

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \langle u(x)|y \rangle = \langle x|v(y) \rangle$$

Définition

On note $v = u^*$, que l'on appelle adjoint de u.

Démonstration.

Remarque : en dimension infinie l'adjoint n'existe pas toujours.

I.2 Exemples

- Déterminer l'adjoint d'un projecteur orthogonal.

- Soient $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs de l'espacce E. Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}|\vec{a} \rangle \vec{b}$

- Une propriété du produit vectoriel.

I.3 Propriétés algébriques de l'adjonction

Proposition

Soient u et v deux endomorphismes de E, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

i. $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$

ii. $(u^*)^* = u$

iii. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

iv. $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

Démonstration.

Ces propriétés sont similaires à celles de la transposition : ce n'est pas un hasard :

Proposition

Soit B une base orthonormée, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_B(u^*) = \mathrm{Mat}_B(u)^T$$

Démonstration.

Attention : ceci est faux si la base n'est pas orthonormée ! On peut par exemple regarder notre second exemple pour s'en convaincre.

De ce résultat on déduit immédiatement que :

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

— $\det u = \det u^*$

— $\chi_u = \chi_{u^*}$

— $\mu_u = \mu_{u^*}$

I.4 Propriétés géométrique de l'adjoint

Proposition

— $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$
— $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^\perp$

Démonstration.

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le rang de u^* est égal au rang de u.

Proposition

Si F est stable, alors $F^\perp$ est u^* stable.

Démonstration.
Ce résultat peut être prouvé matriciellement ou directement en utilisant la définition. Donnons les deux preuves.

Exemple. (Un exercice d'oral)

Déterminer les sous-espaces stables par l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

II Matrices orthogonales

II.1 Définitions équivalentes

Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est orthogonale si elle vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

i. $M^T M = I_n$
ii. $M M^T = I_n$
iii. M est inversible et $M^{-1} = M^T$

L'équivalence entre ces trois définitions vient du fait qu'une matrice **carrée** est inversible si et seulement si elle est inversible à droite ou à gauche.

La propriété suivante est quelquefois plus facile à utiliser :

Proposition (caractérisation par les lignes et les colonnes)

La transposée d'une matrice orthogonale est orthogonale.

Une matrice M est orthogonale si et seulement si ses colonnes (ou ses lignes, par transposition) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

On dispose également d'une caractérisation en termes de changement de base orthonormée :

Proposition

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ un base orthonormée.
Alour pour toute base $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est orthogonale si et seulement si $\mathcal{B}'$ est orthonormée

II.2 Matrices orthogonales en dimension 2

Les matrices orthogonales en dimension 2 sont simples . Elles ont l'une des formes suivantes :

$M = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $M = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, θ étant un paramètre réel.

II.3 Cas de la dimension 3

Il n'existe pas de forme générale simple pour les matrices orthogonales de dimension 3. En pratique, soit on applique la définition, soit on montre que les colonnes forment une base orthonormée. A l'aide du produit vectoriel, on dispose également de la simplification suivante :

Pour vérifier qu'une matrice $M = [C_1, C_2, C_3]$ est orthogonale, il suffit de :

i. vérifier $\|C_1\| = \|C_2\| = 1$

ii. vérifier $\langle C_1|C_2\rangle = 0$

iii. calculer $C_1 \wedge C_2$ et vérifier que $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$.

Exemple : trouver les conditions pour que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & a'' \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ soit orthogonale.

II.4 Le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Produit et inverse

Proposition

Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.

L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

Ceci nous autorise à énoncer la définition suivante :

Définition

On pose $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = I_n\}$.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, appelé groupe orthogonal.

II.5 Déterminant et application :

Proposition

Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det M = \pm 1$.

Attention, la réciproque est fausse.

Première application : le groupe spécial orthogonal

Définition

On note $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$. On nomme $SO_n(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal, et ses éléments sont appelés les matrices de rotation ou matrices orthogonales positives ou encore matrices orthogonales directes.

Exemple. Il est important de connaître le groupe $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$ des rotations du plan (nous expliquerons ce terme géométriquement). Examinons en détail ce groupe :

- : Loi multiplicative :

- : inverse :

- :Un morphisme de groupe important :

Cas du déterminant -1 :

Définition

On note $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det M = -1\}$.

Remarquons que $O_n^-(\mathbb{R})$ n'est pas une groupe (cet ensemble est beaucoup moins important pour cette raison). Les matrices orthogonales de déterminant -1 sont dites négatives ou indirectes.

Seconde application : Orientation d'un espace euclidien

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E. On dit qu'elles sont de même sens (ou de même orientation) si la matrice orthogonale $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est de déterminant positif.

Il est immédiat que ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormées. Cette relation a deux classes. Orienter l'espace E c'est **choisir** l'une de ces classes et décréter que ses bases sont directes.

Il y a donc deux orientations possibles pour un espace euclidien. Une fois choisies les bases directes, les autres sont indirectes. Les matrices de $SO_n(\mathbb{R})$ transforment les bases directes en bases directes.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, si l'on décrète (et on le fait toujours) que la base canonique est directe, alors une base orthonormée (C_1, C_2, C_3) vérifie automatiquement comme nous l'avons vu l'égalité $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$. Cette base sera directe si le signe est positif, et indirecte sinon.

III Endomorphismes symétriques ou autoadjoints

III.1 Définitions

Définition

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est symétrique ou autoadjoint lorsque :

$$u = u^*$$

Remarque. Par extension, lorsque E est de dimension infinie on dit que u est autoadjoint si

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E,\ \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$$

III.2 Exemple de référence

Soit p un projecteur. p est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.
La démonstration doit être connue

Les propriétés qui suivent sont des traductions immédiates des propriétés de l'adjoint :

III.3 Propriétés algébriques

Proposition

L'ensemble $S(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un espace vectoriel.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il est équivalent de dire :

i. u est un endomorphisme symétrique.
ii. il existe B une base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u)$ soit une matrice symétrique.
iii. pour toute base orthonormée B, $\mathrm{Mat}_B(u)$ est une matrice symétrique.

On ne peut toutefois rien dire de la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base quelconque.

Corollaire

On note $n = \dim E$. L'application ϕ_B définie ci-dessous est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\phi_B : \left|\begin{array}{lcl} S(E) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_B(u) \end{array}\right.$$

En particulier, $\dim S(E) = \dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque :

— Si u et v sont deux endomorphismes autoadjoints alors $u \circ v$ n'est pas autoadjoint en général.
— Si u et symétrique et bijectif, alors u^{-1} est symétrique.

Propriétés géométriques :

Proposition

Soit u un endomorphisme autoadjoint.

i. soit F un sous-espace vectoriel u-stable. Alors $F^{\perp}$ est également u-stable
ii. $\ker u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.
iii. (important)Les différents espaces propres d'un endomorphisme symétriques sont orthogonaux entre eux.

Démonstration. A savoir refaire

III.4 Théorème spectral

Le théorème ci dessous est l'un des plus importants du programme de seconde année :

Théorème (Version endomorphismes)

Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme autoadjoint. Alors u possède une base orthonormée de vecteurs propres. Réciproquement, tout endomorphisme admettant une base orthonormée de vecteurs propres est autoadjoint.

On dit qu'un endomorphisme est autoajoint si et seulement si il est **orthogonalement diagonalisable**

Théorème (Version matricielle)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est équivalent de dire :

i. ${}^tM = M$
ii. Il existe D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que $M = P^{-1}DP$.

On dit alors que M est orthogonalement diagonalisable.

Pour prouver ces deux théorèmes on a besoin d'un lemme, lui même important :

Lemme spectral

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Le polynôme caractéristique χ_M est toujours scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration (lemme)**.**

Démonstration (du théorème version endomorphisme).

Démonstration (version matricielle).

III.5 Premiers exemples

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer sans calcul que la matrice réelle suivante est diagonalisable. Trouver une base de vecteurs propres.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

- Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$? On considère l'application ϕ définie ci-dessous :

$$\phi : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM + \mathrm{Tr}(M) I_n \end{array} \right.$$

Montrer que ϕ est diagonalisable.

- On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ vérifiant :

$$\langle P|Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On considère ϕ l'endomorphisme suivant :

$$\phi : \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & XP' - P" \end{array} \right.$$

Montrer que ϕ est diagonalisable.

Les deux exemples qui suivent sont plus théoriques :

- Déterminer toutes les matrices symétriques réelles telles que $\mathrm{Tr}(A^4) = 0$.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer qu'il existe $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée telle que $(u(e_1), ..., u(e_n))$ soit orthogonale.

Remarque. Le théorème spectral ne s'étend pas aux matrices symétriques complexes. Par exemple, on voit aisément que la matrice M suivante n'est pas diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV Isométries vectorielles

IV.1 Définitions

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une isométrie vectorielle si

$$\forall\, x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$$

On dit aussi que f préserve la norme.
On dit aussi que f est un automorphisme orthogonal.

IV.2 Premiers exemples : les symétries orthogonale

Soit F un sous espace vectoriel de E. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie vectorielle par rapport à F dans la direction de $F^{\perp}$.

Proposition

Toute symétrie orthogonale est une isométrie

C'est en particulier le cas lorsque l'espace F est un hyperplan (et donc que $F^{\perp}$ est une droite. Dans ce cas, il y a une terminologie particulière :

Définition

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan, on appelle réflexion d'hyperplan $\mathcal{H}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{H}$.

Ces application sont facile à déterminer explicitement : Si n est un vecteur **unitaire** de $\mathcal{H}^{\perp}$, alors la réflexion d'hyperplan $\mathcal{H}$ est :

$$s_{\mathcal{H}} : x \longmapsto = x - 2\langle n|x\rangle\, n$$

Par exemple : déterminer la matrice de la réflexion par rapport au plan $x + 2y - 3z = 0$.

IV.3 Différentes caractérisations

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est un isométrie vectorielle
ii. f est bijective et $f^* = f^{-1}$
iii. f conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y, \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$$

iv. L'image par f d'une base orthonormée de E (resp. de toute base orthonormée) est une base orthonormée.

Démonstration. A connaître.

Remarque : le fait que les isométries soient bijectives justifie l'autre terminologie :**automorphismes** orthogonaux (moins utilisées). On peut par exemple remarquer que les projecteurs orthogonaux ne sont pas des isométries : ils ne sont pas bijectifs (par ailleurs, on sait qu'il ne conservent pas la norme).

IV.4 Caractérisation matricielle

Proposition

Soit B une base orthonormée de E, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

f est une isométrie si et seulement si $\mathrm{Mat}_B(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

IV.5 Le groupe $\mathcal{O}(E)$

La caractérisation précédent conduit à définir :

Proposition

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux. Alors $\mathcal{O}(E)$ est un groupe pour la composition.

$\mathcal{O}(E)$ s'appelle le groupe orthogonal de l'espace préhilbertien $(e, \langle\cdot|\cdot\rangle)$.

Cela signifie que la composée et l'inverse d'une isométrie sont des isométries, ce qui est immédiat :

Bien entendu la correspondance matrice- endomorphisme fait que

Proposition

Soit B une base orthonormée de E,
L'application ϕ défini ci-dessous est un isomorphisme de groupes :

$$\phi : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{O}(E) & \longrightarrow & \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_B(f) \end{array} \right.$$

L'isomorphisme entre le groupe orthogonal matriciel et le groupe orthogonal "géométrique" fait que toutes les propriétés des matrices orthogonales se traduisent sur les isométries. En partiulier on a les deux résultats suivants :

Proposition

— Si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det f = \pm 1$.

— l'ensemble $SO(E) = \{f \in \mathcal{O}(E),\ \det f = 1\}$ est un sous groupe (appelé groupe spécial orthogonal).

ainsi que la propriété topologique suivante :

Proposition

Les groupes $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}(E)$ sont des compacts.

IV.6 Réduction des isométries

Proposition

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Les seuls valeurs propres réelles éventuelles de f sont 1 et -1.

A la différence des endomorphismes autoadjoints, ceci ne suffit pas pour réduire les isométries car elles peuvent avoir des valeurs propres non réelles. Dans ce cas, il n'y a aucune chance de pouvoir les diagonaliser. On dispose cependant d'un théorème de réduction en base orthonormée à une forme diagonale par blocs.

Théorème de réduction en base orthonormée

Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe des entiers r s et p, des réels $(\theta_1, ..., \theta_p)$ dans l'intervalle $]0, \pi[$, et une matrice orthogonale P tels que :

$$P^{-1}MP = P^T MP = \begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & -I_s & & (0) & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_p} \end{pmatrix}$$

ou chaque R_{θ_i} est une matrice de rotation de taille 2 :

$$R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Cette réduction est unique à l'ordre près des éléments diagonaux.

Démonstration.

La mise en pratique ce cette réduction sur des exemples peut être délicate et n'est pas un objeictif du programme. Nous nous contenterons donc de donner un exemple d'utilisation théorique :

Exemple : Démontrer qu'une matrice orthogonale n'a que des valeurs propres de module 1 et que si toutes les valeurs propres sont réelles alors c'est une symétrie orthogonale.

V Endomorphismes symétriques positifs

V.1 Ecriture matricielle d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Commençons cette section par un calcul :

Proposition

Soit $\langle | \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (pas forcément le produit scalaire usuel). Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique.
Notons A la matrice symétrique de terme général $a_{i,j} = \langle e_i | e_j \rangle$, alors pour tous vecteurs X, Y on a :

$$\langle X|Y \rangle = X^T AY$$

Remarque : attention à la taille des objet dans cette formule ! ! en particulier, bien noter que le résultat est un nombre réel.

Définition

La matrice A s'appelle la matrice du produit scalaire $\langle | \rangle$ dans la base canonique.

Comme le produit scalaire est défini positif on a la propriété

$$\forall X \neq 0, \; X^T AX > 0$$

Ceci suggère la définition suivante :

V.2 Matrices symétriques positives, endomorphismes autoadjoints positifs.

Définition

Soit u un endomorphisme autoadjoint, soit $A \in S_n(\mathbb{R}$.

— On dit que u est positif lorsque :

$$\forall \, x \in E, \; \langle u(x)|x \rangle \geqslant 0$$

— On dit que A est positive lorsque :

$$\forall \, X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), \; X^T AX \geqslant 0$$

— On dit que u est défini positif lorsque :

$$\forall \, x \neq 0 \in E, \; \langle u(x)|x \rangle > 0$$

— On dit que A est définie positive lorsque :

$$\forall \, X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), \; X^T AX > 0$$

Vocabulaire :
l'application $x \mapsto \langle u(x)|x\rangle$ s'appelle la forme quadratique associée à u.

l'application $X \mapsto X^T AX$ s'appelle la forme quadratique associée à A.

Les deux notions sont équivalentes puisque si B est une base **orthonormée** et si A est la matrice de l'endomorphisme symétriques u dasn B alors on a :

$$X^T AX = \langle u(x)|x\rangle$$

Remarque : si $x = 0$ on a toujours $\langle u(x)|x\rangle = 0$. Donc tout endomorphisme défini positif est positif. La réciproque est fause (par exemple $u = 0$).

Exemples : l'identité et les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes autoadjoints positifs en effet :

Exemples
Soit a un vecteur d'un espace euclidien. Montrer que l'endomorphisme $u : x \mapsto x - \langle a|x\rangle\, a$ est symétrique. Est il positif ? Défini positif ?

Notations

On note :

-$S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
-$S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.
-$\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs.
-$\mathcal{S}^{++}E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

Ces ensembles n'ont pas de structure algébrique particulière (groupe, espace vectoriel......)
Les matrices des produits scalaires sont les matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$

V.3 Caractérisation spectrale

Théorème

Il est équivalent de dire :

i. A est positive

ii. $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_+$

De même, il est équivalent de dire :

i. A est définie positive

ii. A est positive et inversible

iii. $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_+^*$

Démonstration (à connaître absolument)**.**

V.4 Exemples

a) À quelles conditions la matrice S est-elle symétrique positive ?

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

b) Peut on trouver 3 réels tels que $x^2 + 11y^2 + z^2 - 6xy - 2yz$ soit strictement négatif ?

c) Un exemple théorique : Soit A une matrice symétrique réelle telle que pour tout X, $X^T AX \geq \|X\|^2$. Montrer que $\det A \geq 1$ et déterminer les cas d'égalité.

d) Un exemple issu de l'analyse : L'endomorphisme dérivée seconde dans l'espace des fonctions périodiques.

V.5 Un exemple important : la matrice $A^T A$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. A savoir faire.

Il est intéressant de voir que cette propriété possède une réciproque :

Proposition

Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (non unique)telle que $M = A^T A$.

Démonstration. Il s'agit d'un classique qu'il est conseillé de savoir refaire

VI Annexe 1 : Applications des matrices symétriques positives

VI.1 Decomposition polaire

Proposition Racine carré d'une matrice symétrique positive

Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S = R^2$.

Il s'agit d'un exercice classique. A chercher.

Proposition Décomposition polaire

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe O une matrice orthogonale et R une matrice symétrique positive telles que $M = OR$.

On ne donne la preuve que dans le cas inversible.
Si M est inversible, la matrice $M^T M$ est symétrique définie positive. Soit R sa racine carrée. Elle est aussi inversible (regarder le déterminant). On pose $O = MR^{-1}$ Un calcul direct prouve que $O^T O = I_n$ donc O est orthogonale : ceci fournit la réponse. Le cas non inversible est plus délicat.

VI.2 Deux normes remarquables

Il est conseillé d'avoir étudié les deux exemples de norme suivant :

Proposition

L'application $N : A \longmapsto \sqrt{A^2}$ est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$. De plus, d'après le théorème spectral, si $\operatorname{Sp} A = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ alors :

$$N(A) = \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

Proposition

L'application $\rho : A \longmapsto \rho(A)$ le rayon spectral de A est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$. En effet, $\rho(A) = \|\!|A|\!\|$.

Remarque. Si A n'est pas symétrique, on montre facilement que $\|\!|A|\!\|^2 = \|\!|{}^tAA|\!\|$. On a donc $\|\!|A|\!\| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

VI.3 Bornes d'une forme quadratique

Proposition

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note q_A la forme quadratique associée, et $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ le spectre ordonné de A. Alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$,

$$\lambda_1 \leqslant \frac{q_A(X)}{\|X\|^2} \leqslant \lambda_n$$

Plus précisément, l'image de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ par $\left(X \longmapsto \frac{q_A(X)}{\|X\|^2}\right)$ est $[\lambda_1, ..., \lambda_n]$.

Démonstration. Comme A est symétrique, elle est orthogonalement diagonalisable et $A = {}^tODO$. Comme ${}^tXAX = {}^t(OX)D(OX)$ avec O orthogonale, on se ramène à l'étude de la forme quadratique associée à D. Alors, puisque $q_D(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$, il est clair que $\lambda_1 \leqslant \frac{q_D(x)}{\|x\|^2} = \frac{\sum \lambda_i x_i^2}{\sum x_i^2} \leqslant \lambda_n$. La forme quadratique atteint λ_1 et λ_n pour les vecteurs propres associés, et est continue, $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ est connexe par arcs, donc son image est le segment $[\lambda_1, \lambda_n]$.

Exemples d'utilisation

Exemple. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que :

i. $\operatorname{Sp} p \circ q \circ p \subset [0,1]$

ii. $\operatorname{Sp} p + q \subset [0,2]$

Exemple. Soit $M = (m_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ son spectre ordonné. Soit $M_k = (m_{ij})_{i,j \in [\![1,k]\!]}$. Alors $\operatorname{Sp} M_k \subset [\lambda_1, \lambda_n]$. En particulier, si M est positive, alors M_k l'est aussi.

VI.4 Réduction simultanée de deux formes quadratiques

Théorème

Soient A et B deux matrices symétriques. On suppose $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors, il existe C une matrice réelle inversible, et D une matrice diagonale, telles que $A = {}^tCC$ et $B = {}^tCDC$.

Démonstration. Nous avons vu qu'il existe C_1 telle que $A = {}^tC_1C_1$. C_1 est inversible car A l'est. On peut donc trouver une matrice B_1 telle que $B = {}^tC_1B_1C_1$. La matrice B_1 est toujours symétrique, donc il existe Q orthogonale et D_1 diagonale telles que $B_1 = {}^tQDQ$. Ainsi, en posant $C = QC_1$, on obtient $A = {}^tCC$ et $B = {}^tCDC$.

VII Annexe 2 : Endomorphismes antisymétriques

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il est équivalent de dire :

i. $u^* = -u$

ii. $\forall\, x \in E,\ u(x) \perp x$.

Démonstration.
$(i) \Longrightarrow (ii)$: On suppose que $u^* = -u$, alors pour tout x, y nous avons $\langle u(x)|y\rangle = -\langle x|u(y)\rangle$, ce qui permet de conclure en prenant $y = x$.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: Si pour tout x, $u(x) \perp x$, alors pour tout x, y nous avons $\langle u(x+y)|x+y\rangle = \langle x|u(y)\rangle + \langle y|u(x)\rangle = 0$.

Proposition

Soit u un endomorphisme antisymétrique de E. Alors le spectre de u est inclus dans $i\mathbb{R}$.

Démonstration. Si u est antisymétrique, alors u^2 est symétrique, donc ses valeurs propres sont réelles positives. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} u^2$, soit x un vecteur propre associé. Alors $\langle u^2(x)|x\rangle = \lambda\|x\|^2 = -\langle u(x)|u(x)\rangle \leqslant 0$. Ainsi, $\lambda \leqslant 0$, et $\operatorname{Sp} u^2 \subset \mathbb{R}_-$. On en déduit que $\operatorname{Sp} u \in i\mathbb{R}$.

Corollaire

0 est la seule valeur propre réelle possible pour $M \in A_n(\mathbb{R})$.

Réduction en base orthonormée

Proposition

Soit $A \in A_3(\mathbb{R})$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

La démonstration de ce résultat est laissée en exercice.