Équations différentielles linéaires

I Généralités sur l'équation scalaire d'ordre n

I.1 Définitions

Définition

Soit I un intervalle, soit n un entier strictement positif, soient $a_0, ..., a_n$ et b des fonctions continues sur I. On suppose que a_n n'est pas identiquement nulle. L'équation différentielle :

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = b \quad (E)$$

s'appelle une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n.

Cette définition se décline selon les situations suivantes :

Définition

On dit que l'équation est normalisée lorsque $a_n = \widetilde{1}$.

$$y^{(n)} + \cdots + a_0 y = b$$

On dit que l'équation est homogène si $b = 0$.
À l'équation (E), on associe l'équation homogène :

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = 0 \quad (E_H)$$

On dit qu'une équation est à coefficients constants lorsque $a_0, ..., a_n$ sont des fonctions constantes sur l'intervalle considéré. Il n'y a pas d'hypothèse sur b.

Remarque. Le fait que I soit un intervalle est essentiel dans les théorèmes à venir.
L'équation est qualifiée de linéaire car l'application $y \mapsto y^{(n)} + \cdots + a_0 y$ est linéaire. Ce fait sera important dans la suite.

I.2 Exemples

Qualifier les équations différentielles scalaires suivantes :

$y'' + \omega^2 y = \sin x$

$(x-1)y' - y = x^2 + 1$

$y'' - e^x y' + e^x y = 0$

Cette qualification préalable est essentielle, car elle décide de la technique qu'il faudra employer pour la résoudre

I.3 Solution

Définition

Une solution est une application y vérifiant :
- y est définie sur I (on parle de I-solution)
- y est de classe au moins $\mathcal{C}^n$
- y vérifie (E)

Pour une équation E et un intervalle I, on notera $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions sur I de E.

Remarque. Noter que cet ensemble dépend à priori de l'intervalle I choisi

I.4 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition

- $\mathcal{S}_I(E_H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- $\mathcal{S}_I(E)$ est soit vide, soit un espace affine dont l'espace vectoriel directeur est $\mathcal{S}_I(E_H)$.

Autrement dit : Si y_0 est une solution quelconque de (E), alors :

$$\mathcal{S}_I(E) = y_0 + \mathcal{S}_I(E_H)$$

Démonstration :

Vocabulaire :
- Une base de l'ensemble des solutions de (EH) s'appelle un **système fondamental**.
- La solution y_0 de la formule ci-dessus est parfois appelée solution particulière. C'est abusif parce qu'elle n'a justement **rien de particulier : n'importe quelle solution de E convient** (le terme solution particulière est issu de la physique : en effet, certaines solutions sont plus intéressantes que d'autres...).

I.5 Raccordement

Proposition (Raccordement)

Soient I_1 et I_2 deux intervalles ouverts tels que $I_1 =]a, b[$ et $I_2 =]b, c[$. Soit y_1 une solution de I_1 et I_2 une solution de I_2.
Alors y_1 et y_2 se raccordent en une solution sur $]a, c[$ si et seulement si :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ \lim_{x\to b^-} y_1^{(k)}(x) = \lim_{x\to b^+} y_2^{(k)}(x)$$

Ceci est utile lorsqu'on sait calculer les solutions séparément sur différentes intervalles.
Exemple
Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $xy' + y = x^2 + 1$

I.6 Superposition. Solutions réelles

Proposition (Principe de superposition)

Soient y_1 et y_2 deux solutions respectives de $a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = b_1$ et $a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = b_2$. Alors $y_1 + y_2$ est solution de $a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = b_1 + b_2$.

Soit (E) $a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = b$ une équation différentielle à coefficients réels. Alors les solutions réelles sont les parties réelles de solutions complexes (et les parties imaginaires sont solutions de E_H)

Exemple. Solutions réelles d'un oscillateur.

On s'intéresse à l'équation (E) $y'' + ay' + by = 0$ lorsque le polynôme $X^2 + aX + b$ n'a pas de racine réelle. On note $\lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\omega$ et $\lambda_2 = -\frac{a}{2} - i\omega$ ses racines. Les solutions de E sont de la forme :

Exemple. Décomposition du second membre en deux seconds membres plus simples.

Déterminer les solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y = x + e^x$$

Exemple. Différence de deux solutions.

Démontrer que l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y = f(x)$$

a au plus une solution qui tend vers 0 en $+\infty$

II Équations vectorielles d'ordre 1

Dans cette section, on introduit un nouvel objet plus général.

II.1 Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On se donne :

i. Un intervalle I

ii. Une application continue b :

$$b : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \overrightarrow{b(t)} \end{array} \right.$$

iii. Une application continue a :

$$a : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ t & \longmapsto & a(t) \end{array} \right.$$

On appelle **équation différentielle vectorielle d'ordre** 1 l'équation (E) :

$$\overrightarrow{x'(t)} = a(t)\left(\overrightarrow{x(t)}\right) + \overrightarrow{b(t)}$$

Comme précédemment, on parle de l'équation homogène (E_H) $\overrightarrow{x'(t)} = a(t)\left(\overrightarrow{x(t)}\right)$. On dit que l'équation (E) est à coefficients constants lorsque $t \longmapsto a(t)$ est constante.

Remarque. Dans un soucis de simplicité d'écriture, on omettra souvent la variable "t" dans l'équation, ainsi que les flèches des vecteurs, pour noter $x' = a \cdot x + b$.

Un exemple issu de la physique

Si $\vec{v}(t)$ désigne la vitesse d'une particule de charge q et de masse m placée dans un champ électromagnétique $\vec{E}(t), \vec{B}(t)$ alors on a

$$\vec{v}' = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}(t) + \frac{q}{m}\vec{E}(t)$$

Ces équations vont avoir pour nous un intérêt surtout théorique. Comme E est de dimension finie, on peut aussi adopter un point de vue matriciel. Ceci conduit à la notion suivante :

II.2 Système différentiel linéaire d'ordre 1

Définition

On se donne :

i. Une application B continue :

$$B : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & B(t) \end{array} \right.$$

ii. Une application A continue :

$$A : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n}(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & A(t) \end{array} \right.$$

Le système d'équation $X' = AX + B$ s'appelle un **système différentiel linéaire** d'ordre 1.

Le système est dit **homogène** lorsque B est la fonction nulle.

Le système est dit **à coefficients constants** lorsque la matrice A ne dépend pas de t.

Ecriture sous forme développée :

Lorsque l'on note $A(t) = (a_{ij}(t))$, $B = (b_i(t))$ et $X(t) = (x_i(t))$, le système différentiel $X' = AX + B$ se réécrit :

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ & \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

On montre sans difficulté le résultat ci-dessous

Proposition

L'équation $x' = a \cdot x + b$ est équivalente au système $X' = AX + B$ où X, A et B sont respectivement les matrices de x, a et b dans une base indépendante de t.

II.3 Les solutions et leurs propriétés

Définition

Une solution est une application $\overrightarrow{x} \in \mathcal{C}^1(I, E)$ telle que pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{x'(t)} = a(t)\left(\overrightarrow{x(t)}\right) + b(t)$.

Exemple. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

Matriciellement, ce système s'écrit :

On peut montrer que les solutions sont les applications :

$$X : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

où

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(t) + B\sin t \\ y(t) = A\sin(t) - B\cos t \end{cases}$$

pour A et B des constantes réelles :

Sur cet exemple illustrons la structure des solutions avant de passer au cas général.

Proposition (structure des solutions)

— $\mathcal{S}_I(S_H)$ des solutions des du système homogène est un sous espace de$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^{\ltimes})$.
— $\mathcal{S}_I(S)$ est soit vide, soit un espace affine dont l'espace vectoriel directeur est $\mathcal{S}_I(E_H)$.

On prouve de la même façon pour ces équations vectorielles **le principe de superposition, la régularité des fonctions solutions et le principe du raccordement.**

II.4 Equivalence d'une équation scalaire et d'un système d'ordre 1

Proposition

Soit (E_n) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b$ une équation scalaire normalisée.

On lui associe le système différentiel (S) $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

alors l'application y est une solution de (E_n) si et seulement si $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution de (S).

Démonstration :

Le système différentiel (S) associé est parfois appelé système compagnon de l'équation différentielle (notez la forme de la matrice ! !).

Si l'on sait résoudre le système (S) alors la proposition ci-dessus indique que les solutions de E_n ne sont rien d'autre que les premières coordonnées des fonctions vectorielles solutions de (S).

La conséquence théorique est que tout théorème démontré sur les équations vectorielles se traduit en termes d'équations scalaires d'ordre n.

III Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

III.1 Problème de Cauchy des équations vectorielles

Définition

Soit (E) $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ une équation vectorielle linéaire du premier ordre sur un intervalle I.
On appelle problème de Cauchy en (t_0, x_0) la question de l'existence et unicité d'une solution x de (E) telle que $x(t_0) = x_0$?

On l'écrira sous cette forme :

$$\mathcal{P}_{t_0,x_0} = \begin{cases} x' = a \cdot x + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

III.2 Cas de l'équation scalaire

Définition

Soit (E) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b$ une équation différentielle linéaire d'ordre n normalisée sur I. Soit $t_0 \in I$, et soit $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. On appelle problème de Cauchy en (t_0, α), noté $\mathcal{P}_{t_0,\alpha}$, la question suivante :

Y a-t-il existence et unicité d'une solution y de (E) vérifiant $y^{(i)}(t_0) = \alpha_i$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$?

Remarque. Un problème de Cauchy est donc un problème de condition initiales au point t_0 : il y a autant de conditions initiales que l'ordre de l'équation : elles portent obligatoirement sur les valeurs de la fonction et de ses dérivées en t_0 (il y a d'autres types de problèmes de conditions initiales, mais nous n'en parlerons pas dans ce cours)

III.3 Équivalence des deux problèmes

Soit (E_n) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b$ une équation scalaire et (S) $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ {\scriptstyle -a_0(t)} & \cdots & \cdots & {\scriptstyle -a_{n-1}(t)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

son système compagnon.

On a le résultat suivant :

Proposition

Soit $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Il est équivalent de dire :

i. y est solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_{t_0,\alpha}$

ii. $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_{t_0,\alpha}$ associé à l'équation (S).

III.4 Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

Proposition

Le problème de Cauchy

$$\mathcal{P}_{t_0,x_0} = \begin{cases} x' = a \cdot x + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est équivalent à

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot x(s) + b(s) ds$$

III.5 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Théorème (équations vectorielles)

Soit $x' = a \cdot x + b$ une équation vectorielle à coefficients continus sur I. Alors pour tout $t_0 \in I$, pour tout $x_0 \in E$, le problème de Cauchy $\mathcal{P}_{t_0,x_0}$ admet une unique solution X de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Théorème (équations scalaires)

Soit (E_n) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b$ une équation différentielle linéaire d'ordre n normalisée. Alors pour tout $t_0 \in I$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy $\mathcal{P}_{t_0,\alpha}$ admet une unique solution y de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

La preuve est hors programme et présentée en annexe.

Important !
Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire n'est pas vérifié pour les équations non normalisées.
Par exemple, l'équation $xy' = 1$ n'admet pas de solution définie en 0.

La normalisation de l'équation différentielle est donc un préalable obligatoire.

III.6 Dimension de l'espace des solutions de (SH). Systèmes fondamentaux de solutions

Théorème

Soit E une espace vectoriel, et soit (S_H) $x' = a \cdot x$ une équation vectorielle homogène à coefficients dans E.
-Pour tout t_0 dans I l'application

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}(t_0)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}_I(S_H)$ sur l'espace E.

-L'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(S_H)$ des solution de S_H sur I est de dimension $n = \dim E$.

Démonstration (à connaître).

Définition

On appelle <u>système fondamental</u> de solutions de (S_H) toute base de $\mathcal{S}_I(S_H)$.

Exemple. Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Alors (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions :

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

Théorème (caractérisation des systèmes fondamentaux

Soit $(X_1, ..., X_n)$ n solutions de (S_H), avec $n = \dim E$. Il est équivalent de dire :

i. $(X_1, ..., X_n)$ est un système fondamental

ii. il existe $t_0 \in I$ tel que $(X_1(t_0), ..., X_n(t_0))$ soit une base de E

iii. pour tout $t_0 \in I$, $(X_1(t_0), ..., X_n(t_0))$ est une base de E

Ainsi, en pratique on pourra calculer un déterminant pour vérifier qu'on a un sytème fondamentaL Vérifions sur l'exemple précédent.

III.7 Systèmes fondamentaux pour l'équation scalaire

Théorème

Soit (E_H) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ une équation différentielle scalaire homogène d'ordre n.
Alors l'espace $\mathcal{S}_I(E_H)$ est de dimension n.

Démonstration.

Définition

On appelle système fondamental toute base $(y_1, ..., y_n)$ de l'espace des solutions de (E_H).

Exemples

Donner des systèmes fondamentaux de solutions pour les deux équations homogènes :
$y' - xy = 0$

$y'' + \omega^2 y = 0$

Caractérisation des systèmes fondamentaux.

Théorème

En conservant les notations précédentes, il est équivalent de dire :

i. $(y_1, ..., y_n)$ est un système fondamental de solutions

ii. il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $\left(\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} y_n(t_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}\right)$ soit une famille libre

iii. pour tout $t \in I$, la famille $\left(\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} y_n(t) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}\right)$ est libre

III.8 Wronskien

Définition (cas scalaire)

Soit $(y_1, ..., y_n)$ une famille de n solutions de (E_H). On pose, pour tout $t \in I$:

$$W_{y_1,...,y_n}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$W_{y_1,...,y_n}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$ que l'on nomme <u>Wronskien</u>.

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. $(y_1, ..., y_n)$ est un système fondamental

ii. il existe $t_0 \in I$ tel que $W_{y_1,...,y_n}(t_0) \neq 0$

iii. $W_{y_1,...,y_n}$ ne s'annule pas sur I

Reprenons nos deux exemples :

Pour la première équation $n = 1$

Pour la seconde equation $n = 2$

III.9 Conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'équation avec second membre

Cas vectoriel : Soit (S) $x' = a \cdot x + b$ une équation vectorielle. Soit $(x_1, ..., x_n)$ un système fondamental de solutions de (S_H), et soit $\vec{x_0}$ une solution de (S). Alors $\mathcal{S}_I(S) = \vec{x_0} + \mathcal{S}_I(S_H)$. Ainsi, les solutions sont de la forme :

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{x_0}(t) + C_1\vec{x_1}(t) + \cdots + C_n\vec{x_n}(t)}$$

avec $(C_1, ..., C_n) \in \mathbb{K}^n$.

Cas scalaire : En conservant les notations de cette partie, si on note y_0 une solution de (E) alors les solutions de (E) s'écrivent de façon unique sous la forme :

$$\boxed{y(t) = y_0(t) + C_1y_1(t) + \cdots + C_ny_n(t)}$$

avec $(C_1, ..., C_n) \in \mathbb{K}^n$.
Il est important de remarquer que cette écriture nous indique :
-que le nombre de constantes d'intégration est égal à n
-que ces constantes apparaissent de façon linéaire dans l'expression des solutions. Ceci est caractéristique du fait que l'équation est linéaire.
On écrit souvent cette relation sous la forme

$$\boxed{\mathcal{S}_I(E_n) = y_0 + vect < y_1, \ldots, y_n >}$$

IV Rappels et compléments sur l'équation scalaire d'ordre 1

IV.1 Equation homogène

Dans tout ce paragraphe, on s'intéresse à l'équation (E) scalaire d'ordre 1 normalisée

$$y' + ay = b$$

avec a et b deux fonctions continues sur I.

On sait qu'alors la fonction y_1 constitue un système fondamental de (E_H) avec $t_0 \in I$:

$$y_1 : t \in I \longmapsto \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Remarque. Le choix de t_0 est arbitraire. Changer t_0 en t_1 multiplie y_1 par une constante non nulle. On peut même dans certains cas choisir la constante t_0 infinie, comme dans l'exemple suivant :

IV.2 Méthode pratique de résolution de (E)

Le fait majeur est qu'on sait toujours résoudre une équation d'ordre un modulo des calculs de primitives. On procède toujours comme suit (variation de la constante) :

On cherche des solutions sous la forme $y(x) = K(x)y_1(x)$. En dérivant, on obtient $y' = K'y_1 + Ky_1'$. On substitue alors y' dans l'équation par $K'y_1 + Ky_1'$, ce qui nous amène à $K'y_1 = b$. Finalement,

$$K'(t) = b(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Les solutions de E sont donc de la forme suivante, avec $C \in \mathbb{K}$ une constante et $t_0 \in I$:

$$\boxed{y(t) = Cy_1(t) + y_1(t)\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(\int_{t_0}^{s} a(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s}$$

IV.3 Conséquences du thérorème de Cauchy-Lipschitz

Dans le cas d'ordre 1 le théorème de Cauchy-Lipschitz possède une interprétation géométrique particulièrement simple :

Proposition

Soit (E) une équation différentielle scalaire d'ordre 1 normalisée. Alors les graphes des solutions forment une partition de $I \times \mathbb{K}$

Démonstration.

IV.4 Exemples

Pour les exemples suivant, un soin particulier sera apporté à la recherche des différents raccordements de solutions.

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante sur $\mathbb{R}$:

$$x(x-a)y' + (2x-a)y = \sin x$$

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$xy' - 3y = 0$$

Que dire du problème de Cauchy associé ?

Exemple. Soit f un fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 en l'infini. Montrer que l'équation $y' - y = f$ possède une unique solution $g(x)$ de limite nulle en l'infini.

V L'équation scalaire d'ordre 2

V.1 Introduction

On s'intéresse à l'équation (E) $y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ avec a_0, a_1 et b des fonctions continues sur I.

Remarque. Il n'existe pas de méthode de résolution générale pour ces équations. Par exemple, la simple équation d'Airy $y'' - xy = 0$, intervenant en optique, n'admet pas de solution exprimable à partir des fonctions usuelles. Néanmoins, on peut affirmer être capable de résoudre l'équation dans les cas suivants :

— lorsque les coefficients sont constants
— lorsque l'on connait une solution non nulle de l'équation

Lorsque la résolution est impossible, on dispose tout de même d'outils qualitatifs, tels que le wronskien.

V.2 Utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz

Interprétation géométrique

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}$ et pour tout $t_0 \in I$, il existe une unique solution y de (E) vérifiant $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$. Géométriquement, cette assertion revient à dire que deux solutions distinctes ne peuvent avoir deux points de tangence.

Utilisation pour les systèmes fondamentaux dans le cas homogène

Wronskien

Proposition

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_H). On pose

$$W_{y_1,y_2}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

Alors (y_1, y_2) est un système fondamental si et seulement si il existe t_0 tel que $W_{y_1,y_2}(t_0)$ est non nul (et alors W_{y_1,y_2} ne s'annule jamais).

Ce résultat est très utile. En voici quelques exemples.

Exemple 1 système fondamental associé à la base canonique.

Exemple 2 Les solutions qui s'annulent en t_0 changent de signe et sont proportionnelles

Exemple 3 Solutions impaires de $y'' - x^2 y = 0$

V.3 Techniques de résolution de l'équation homogène : cas des coefficients constants

Proposition

Soit (E_H) $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ une équation homogène. On considère le polynôme $P = X^2 + a_1 X + a_0$. Soient λ_1, λ_2 les racines complexes de P, que l'on suppose distinctes. Alors $(x \longmapsto e^{\lambda_1 x}, x \longmapsto e^{\lambda_2 x})$ forme un système fondamental de solutions complexes.
Si P possède une racine double λ alors un système fondamental de solutions est donn par les deux fonctions $(x \longmapsto e^{\lambda x}, x \longmapsto x e^{\lambda x})$

Démonstration.

V.4 Exemples de techniques dans le cas des coefficients non constants

Il n'existe pas de méthode générale quand les coefficients ne sont pas constants. Voici plusieurs techniques couramment utilisées : si au cours d'un problème, une de ces techniques est requise, une indication sera toujours donnée.

a) Rechercher des solutions "simples"

Il est fréquent de commencer par chercher des solutions classiques. On pourra chercher, comme dans l'exemple précédent, des solutions de la forme $x \longmapsto x^\alpha$, ou des solutions polynômiales.
Exemple. Montrer que l'équation suivante possède une solution polynômiale :

$$(x^2 + 2x - 1)y'' + (x^2 - 3)y' - (2x + 2)y = 0$$

b) Rechercher des solutions développables en séries entières

Rappel de la méthode :

i. on écrit y sous la forme d'une série entière
ii. on dérive formellement cette série
iii. on remplace les dérivées successives de y par les séries entières dans l'équation
iv. on trouve une relation sur les coefficients grâce au théorème d'unicité
v. on vérifie que la fonction obtenue est bien de rayon non nul

Exemple. À l'aide de cette méthode, résoudre :

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

V.5 Technique du changement de variable

Principe

On considère l'équation $y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$. On souhaite opérer le changement de variable $x = \phi(t)$, avec ϕ de classe au moins $\mathcal{C}^2$. On procède ainsi :

i. on change le nom de la fonction(et de la variable) :

$$z = y \circ \phi, \text{ soit } z(t) = y(x)$$

ii. on dérive la nouvelle fonction :

$$z' = (y' \circ \phi) \times \phi' \quad \text{et} \quad z'' = (y' \circ \phi) \times \phi'' + (y'' \circ \phi) \times (\phi')^2$$

iii. on substitue dans l'équation

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire vérifiée par z pour la nouvelle variable t.

Remarque. En général, les changements de variables sont bijectifs, on peut donc aussi écrire $t = \psi(x)$ et dériver dans l'autre sens.

Exemple. Résoudre l'équation d'Euler avec le changement de variable $x = e^t$.

V.6 Technique de résolution de l'équation avec second membre

On rappelle qu'en première année on a vu une méthode dans le cas des équations à coefficients constants. En voici un exemple.

Pour le cas général, voir la section : **méthode de variation de la constante**

VI Systèmes différentiels à coefficients constants

Dans cette section, nous nous intéressons à des équations vectorielles $\overrightarrow{x'(t)} = a \cdot \overrightarrow{x(t)} + \overrightarrow{b(t)}$ ou a des systèmes différentiels $X'(t) = AX(t) + B(t)$ à coefficients constants, c'est à dire que a et A ne dépendent pas de la variable t.

VI.1 Rappel sur l'exponentielle de matrices ou d'endomorphismes

Définition

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge absolument, et on nomme :

$$\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Si E est de dimension finie, et si $a \in \mathcal{L}(E)$, alors la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge absolument, et on nomme :

$$\exp a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Quelques propriétés

On rappelle sans démonstrations les propriétés de l'exponentielle d'une matrice (qui se traduisent directement sur les endomorphismes).

— Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $P^{-1}(\exp A)P = \exp(P^{-1}AP)$
— Si A est diagonalisable, $\exp A$ l'est aussi
— Si A est trigonalisable et $\operatorname{Sp} A = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $\operatorname{Sp} \exp A = (e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$
— $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$
— $\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$
— $\exp A$ est un polynôme en A (cette propriété est plus une curiosité qu'un résultat important)
— Si A et B commutent, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$

Méthodes de calcul

Il existe plusieurs techniques pour calculer une exponentielle de matrice.
— Diagonaliser la matrice
— Utiliser un polynôme annulateur
— Décomposer la matrice en la somme de deux matrices qui commutent.

Voici quelques exemples.

VI.2 Dérivation de l'exponentielle

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application ϕ définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ (en fait $\mathcal{C}^\infty$) :

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array} \right.$$

De plus, $\phi' = A \times \phi = \phi \times A$.

Corollaire

L'application $t \longmapsto \exp(tA)$ est la solution du problème de Cauchy matriciel :

$$\begin{cases} M' = AM \\ M(0) = I_n \end{cases}$$

Attention : il s'agit d'un problème de Cauchy dans $M_n(\mathbb{K})$ et pas dans $\mathbb{K}^n$.

VI.3 Résolution du système $X' = AX$

Théorème (Résolution par l'exponentielle)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $X_0 \in \mathbb{K}^n$, soit $t_0 \in \mathbb{R}$. La solution du problème de Cauchy $X' = AX$ et $X(t_0) = X_0$ est l'application :

$$t \longmapsto \exp((t - t_0)A)X_0$$

Démonstration.

Corollaire

Les colonnes de $\exp(tA)$ constituent un système fondamental de solutions de S_H.

Plus précisément :

Proposition

Soit $(Y_1, ..., Y_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(t) = \exp(tA)Y_i$. Alors les X_i forment un système fondamental de solutions.

Commentaire : L'utilisation de l'exponentielle de matrice est un outil très puissant. Cependant, étant donné que le calcul d'une exponentielle n'est pas toujours facile, pour les exercices pratiques, et dans le cas diagonalisable, on pourra préférer la méthode présentée ci-après.

Théorème (Résolution par diagonalisation)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres et $W_1, ..., W_n$ des vecteurs propres associés. Alors les fonctions $X_i : t \longmapsto e^{\lambda_i t} W_i$ forment un système fondamental du système $X' = AX$.

Démonstration.

Exemple. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$$

VI.4 Résolution dans le cas trigonalisable

Une méthode possible est de se ramener au cas triangulaire par changement de base, comme dans le cas diagonalisable, puis de résoudre le système triangulaire en partant de la dernière ligne. Cette méthode est extrêmement fastidieuse et doit être proscrite si la dimension est plus grande que 3.
Mettons la en oeuvre sur un exemple simple.

VII Méthodes de variation de la constante

VII.1 Présentation de la méthode générale

Les méthodes de variation de la constantes sont des techniques de résolution de l'équation compléte lorsque on connait un système fondamental de solutions de l'équation homogène. Elles généralisent la technique vue l'année dernière. Le programme limite leur utilisation à l'équation scalaire d'ordre 2. Mais pour comprendre la technique il est plus simple de la faire d'abord pour un système.
Le but est ici de trouver une solution d'une équation vectorielle ou scalaire (E) lorsque l'on connaît déjà un système fondamental de l'équation homogène. Plaçons nous pour commencer dans le cas vectoriel. On considère le système différentiel $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. On suppose connaître $(X_1, ..., X_n)$ un système fondamental. On note $R(t) = [X_1(t), ..., X_n(t)]$ la matrice dont les colonnes sont les fonctions du système fondamental évaluées en t. Cette matrice est parfois appelée la résolvante du système. Son déterminant est le Wronskien. Elle est donc inversible.

Proposition (variation de constante vectorielle)

Soit $t \longmapsto Y(t)$ une fonction vectorielle. Alors $Y(t)$ est solution de l'équation $X' = AX + B$ si et seulement si $Y(t) = R(t)C(t)$, où $C(t)$ est une fonction vectorielle de classe C^1 solution de l'équation différentielle "des constantes" :

$$R(t)C'(t) = B(t)$$

Démonstration.

Pour trouver C il reste alors a **calculer n primitives**. On peut donc toujours déterminer les solutions (si on sait calculer les primitives). Formellement, ceci peut s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$\boxed{Y(t) = R(t)\Lambda_0 + \int_{t_0}^{t} R(t)R^{-1}(s)B(s)\,\mathrm{d}s}$$

La formule encadrée ci-dessus n'est pas à connaître. Il est surtout intéressant de la comparer à ce qui se passe dans le cas de l'équation scalaire d'ordre 1. En pratique, nous n'appliquerons cette méthode que dans le cas des équation scalaires d'ordre 2 qui lui doit être bien connu.

VII.2 Cas des équations scalaires d'ordre 2

Dans le cas des équations d'ordre 2 la méthode doit être maîtrisée :

Théorème

On considère l'équation (E) $y'' + a_1y' + a_2y = b$. On suppose connu (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de (E_H). Les solutions de (E) sont alors de la forme $y = C_1y_1 + C_2y_2$ où C_1 et $C - 2$ sont deux fonctions de classe C^1 vérifiant le système d'équations suivant (équation aux constantes) :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Cette méthode est recommandée lorsqu'on connait un système fondamental. En pratique, il est conseillé de connaitre par coeur l'équation aux constantes, ou de savoir la retrouver à partir du cas général. Une fois écrite l'équation aux constantes on n'a plus qu'à résoudre un système 2×2 et à calculer deux primitives.

Exemple. Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation suivante :

$$x^2 y'' + 3xy' + y = \ln x$$

Exemple (oscillateur forcé)**.**
Cet exemple est très classique et doit pouvoir être refait.
On considère l'équation (E) $y'' + \omega^2 y = f$, où $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Montrer que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{y : x \longmapsto K_1 \cos x + K_2 \sin x + \int_0^x \frac{f(t)}{\omega} \sin\left(\omega(x-t)\right) \mathrm{d}t}$$

VIII Annexes, résultats complémentaires

Les résultats de cette section ne sont pas au programme.

VIII.1 Résolution du système homogène avec second membre

On considère l'équation (E) $X' = AX + B$ où A ne dépend pas de t (mais B oui). Pour l'équation homogène, la forme générale de la solution est $X(t) = \exp(tA)C$, avec $C \in \mathbb{K}^n$. La méthode de variation de la constante C, en tout point analogue à ce qui a été fait avant donne à la forme générale des solutions de (E). Les solutions sont les X de la forme ci-dessous, avec $C \in \mathbb{K}^n$ et $t_0 \in I$:

$$\boxed{X(t) = \exp(tA)C + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)B(s)\,\mathrm{d}s}$$

Remarque. Cette formule, peut utile en pratique, conserve un intérêt théorique. Il est conseillé de faire soi même une fois le calcul.

Exemple. Résoudre le système suivant :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

VIII.2 Lemme de Gronwall

Le principe du lemme est simple : au lieu d'une égalité, on dispose d'une inégalité. On a donc une "inégalité différentielle" du type :

$$y(x) \leqslant C + \int_0^x b(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarquons que si on remplace "$\leqslant$" par "$=$" et que l'on dérive, on retrouve exactement une équation différentielle linéaire du premier ordre. Le lemme permet d'obtenir une majoration de y, encore une fois très semblable à la solution de l'équation correspondante.

Proposition

Soient $C \in \mathbb{R}$ et b une fonction positive continue. Soit y une fonction continue vérifiant :

$$\forall x \geqslant 0, \quad y(x) \leqslant C + \int_0^x b(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors :

$$\forall x \geqslant 0, \quad y(x) \leqslant C \exp\left(\int_0^x b(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Démonstration. Soit $x \geqslant 0$. On pose $z = \int_0^x y(t)b(t)\,\mathrm{d}t$. Par hypothèse, $z'(x) \leqslant b(x)(C + z(x))$. En réarrangeant les termes et en multipliant par $\exp(-\int_0^x b(t)\,\mathrm{d}t)$ on obtient :

$$\exp\left(-\int_0^x b(t)\,\mathrm{d}t\right)(z'(x) - b(x)z(x)) \leqslant Cb(x)\exp\left(-\int_0^x b(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

En intégrant sur $[0, x]$, puis en simplifiant, on aboutit à :

$$z(x) \leqslant C\left(\exp\left(\int_0^x b(t)\,\mathrm{d}t\right) - 1\right)$$

Finalement :

$$y(x) \leqslant C + z(x) \leqslant C\exp\left(\int_0^x b(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

VIII.3 Exemple d'étude qualitative d'une équation différentielle

Voici une illustration de ce que permet le lemme de Gronwall.

On considère (E) l'équation suivante :

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) y = 0$$

Montrer que toute solution de (E) sur $]0, +\infty[$ possède un développement asymptotique de la forme $y(x) = A\cos x + B\sin x + o_\infty(1)$

VIII.4 Résolution de l'équation d'ordre n à coefficients constants

Le résultat de cette section est une application efficace de l'exponentielle de matrice. Il n'est pas explicitement au programme.

Proposition

Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On considère l'équation scalaire (E) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$. On note P son polynôme caractéristique, avec $P = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors un système fondamental de solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \longmapsto t^l e^{\lambda_k t},\ k \in [\![1, p]\!],\ l \in [\![0, m_k - 1]\!] \right\}$$

Démonstration. Soit A la matrice compagnon de P. y vérifie (E) si et seulement si $X' = AX$, où $X = {}^t(y, ..., y^{(n-1)})$. Or, $X' = AX$ équivaut à $X(t) = \exp(tA)X(0)$.
En utilisant la décomposition de A en sous espaces caractéristiques, il vient que

$$exp(tA) = \sum_{k=1}^{p} P_k(t) e^{\lambda_k t}$$

où chaque P_k est un polynômes à coefficients matriciels de degré inférieur ou égal à $m_k - 1$
En multipliant par un vecteur colonne X_0 arbitraire et en prenant la première coordonnée du vecteur $X(t)$ obtenu il vient ;

$$y(t) = \sum_{k=1}^{p} Q_k(t) e^{\lambda_k t}$$

ou les Q_k sont des polynômes (à coefficients complexes...) vérifiant la même condition de degré.
Ainsi $\mathcal{S}$ engendre bien l'espace vectoriel des solutions. De plus il est de cardinal n, c'est donc bien un système fondamental.

Exemple. (mines)
Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$$

VIII.5 Un autre exemple d'application de l'exponentielle de matrice : comportement asymptotique des solutions

On présente ici, à titre d'illustration des systèmes différentiels, un résultat utile en mécanique.

Proposition

On considère le système (E) $X' = AX + B$ avec $B(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
On suppose que $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_-^*$. Alors les solutions de (E) tendent vers 0 en l'infini.

Démonstration. On sait que les solutions sont de la forme :

$$X(t) = \exp(tA)C + \int_0^t \exp((t-s)A)B(s)\,\mathrm{d}s$$

Si A est diagonalisable de spectre $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $\exp(tA)$ est semblable à une matrice diagonale de coefficients $e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n}$ qui tendent vers 0 en l'infini, d'où $\exp(tA)$ tend vers 0. Dans le cas non diagonalisable, on abouti au même résultat en passant par la décomposition de Dunford. Reste à étudier le second terme de la somme.

$$\int_0^t \exp((t-s)A)B(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} e^{xA}\mathbb{1}_{[0,t]}(x)B(t-x)\,\mathrm{d}x$$

On applique alors le théorème de convergence dominée :

— $\left\| e^{xA}\mathbb{1}_{[0,t]}(x)B(t-x)\right\| \leqslant \|\exp(xA)\| \cdot \|B\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$ car B continue et tend vers 0 en l'infini

— $\|\exp(xA)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

— $e^{xA}\mathbb{1}_{[0,t]}(x)B(t-x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{xA}\mathbb{1}_{[0,t]}(x)B(t-x)\,\mathrm{d}x$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, d'où $X(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

On peut alors sans peine en déduire le résultat suivant :

Corollaire

On considère l'équation scalaire (E) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b$, avec b tendant vers 0 en l'infini et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ ayant toutes ses racines à parties réelles strictement négatives. Alors toute solution de (E) tend vers 0 en l'infini.

IX Démonstration du théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire

On rappelle son énoncé :

Théorème

Soit $x' = a \cdot x + b$ une équation vectorielle à coefficients continus sur I. On suppose de plus que b est continue sur I. Alors pour tout $t_0 \in I$, pour tout $x_0 \in E$, le problème de Cauchy $\mathcal{P}_{t_0,x_0}$ admet une unique solution X de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Démonstration.

• Remarquons (démonstration facile) que x est solution du problème de Cauchy si et seulement si x est une application continue telle que pour tout $t \in I$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)x(s) + b(s))\,\mathrm{d}s \tag{1}$$

On est donc ramené à une équation intégrale. On remarque surtout qu'on a transformé le problème en un problème de point fixe pour un opérateur sur l'espace des fonctions continues.

On considère J un segment contenant inclus dans I contenant t_0. Comme J est compact, a et b sont bornés sur J, et on choisit (α, β) tels que pour tout $t \in J$, $\|a(t)\| \leqslant \alpha$ et $\|b(t)\| \leqslant \beta$. On définit alors la suite de fonctions (x_k) par $x_0 = x_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in I$:

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)x_k(s) + b(s))\,\mathrm{d}s$$

Alors, en se plaçant sur le segment J, on démontre facilement par récurrence la majoration suivante :

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leqslant (\alpha\|x_0\| + \beta)\frac{\alpha^k|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Le membre de droite est le terme général d'une série (exponentielle) normalement convergente sur J , on en déduit que la série $\sum(x_{k+1} - x_k)$ converge normalement sur tout compact de I. Ainsi, (x_k) converge uniformément sur tout compact vers une fonction x continue sur I (chaque x_k l'est). De plus, par le théorème d'intégration des suites de fonctions sur un segment (ou le théorème de convergence dominée), on a pour tout t,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} (a(s)x_k(s) + b(s))\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} (a(s)x(s) + b(s))\,\mathrm{d}s$$

ce qui prouve que x qui vérifie l'équation (1) donc vérifie le problème de Cauchy. Nous avons montré l'existence.

• Pour l'unicité, on considère deux fonctions x_1 et x_2 qui vérifient le problème de Cauchy sur J. Leur différence x vérifie pour $t \in J$:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

Comme x est continue sur J compact, on déduit de l'égalité précédente $\|x(t)\| \leqslant M\alpha|t - t_0|$ pour $t \in J$, puis par récurrence immédiate :

$$\|x(t)\| \leqslant M\alpha^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}$$

En faisant tendre k vers l'infini, on montre $x = 0$ donc que $x_1 = x_2$ sur J. Ceci étant vrai pour tout segment J inclus dans I, on a bien unicité de la solution sur I.