Espaces euclidiens

Un peu d'histoire : Cauchy et les limites.

Il suffit de se souvenir des paradoxes de Zénon d'Elée (Achille et la tortue, la flèche) pour mesurer les difficultés qu'on rencontre en tentant de définir la notion de limite (de façon générale, tout ce qui touche à l'infini à toujours été sujet à controverse et paradoxes). Ainsi, même aprés l'invention du calcul différentiel (par Leibniz et Newton au 17eme siècle), on manipule des dérivées, intégrales et autres séries sans autre notion de limite que celle de « ce vers quoi s'approche le rapport de deux quantité, sans jamais l'atteindre ». Cette absence de formalisme conduira par exemple Bernoulli à affirmer que $\sum_0^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$....ce qui est faux,mais en un certain sens légitime. C'est le plus grand mérite du baron Louis Augustin Cauchy (1789-1857), l'un des plus grands analystes du 19eme siècle que d'avoir formulé une définition cohérente de limite, toujours en vigueur aujourd'hui. Mais ce n'est pas le seul : on lui doit aussi l'invention de l'analyse complexe, les démonstrations rigoureuses des résultats de base de l'analyse et les plus grands théorème d'existence sur les équations différentielles

Adjoint

1. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. On suppose que pour tout x on a l'égalité $(u(x)|x) = 0$. Démontrer que $u^* = -u$.

2. f un projecteur.
   (a) Démontrer que $f*$ est un projecteur.
   (b) On fait l'hypothèse que f est un projecteur orthogonal. Que vaut f^* ?
   (c) On fait l'hypothèse que f et f^* commutent. Démontrer que $\ker f == \ker f^*$. En déduire que f est un projecteur orthogonal.

3. On fixe deux matrices A B, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.
   Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto AMB$.

4. On munit l'espace $\mathcal{C}([0,1])$ du produit scalaire intégral usuel.
   On note ϕ l'endomorphisme qui à f associe sa primitive qui s'annule en 1. Montrer que ϕ possède un adjoint et le déterminer.

5. On dit qu'un endomorphisme f d'un espace euclidien est normal si f commute avec f^*.

   Démontrer que si f est normal alors $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires orthogonaux.
   Démontrer que si f est normal, les espaces propres de f sont en somme orthogonale.

Propriétés générales des matrices orthogonales

6. Soient A et B deux matrices de $O^2(\mathbb{R})$ telles que
   (a) On suppose $A^3 = B^5 = I$. Calculer leur déterminant et en déduire toutes les matrices A et B possibles.
   (b) On suppose $\det A = -1$ et $B^5 = I$ calculer les matrices A^2 et déterminer ABA^{-1}.

7. Exercices calculatoires.
   (a) Soit a une réel : $A = a\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}^2$ est elle orthogonale ?
   (b) Quelles sont les matrices A qui sont à la fois orthogonales et triangulaires ?
   (c) Prouver le plus simplement possible que la matrice $\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\phi\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi \end{pmatrix}$ est orthogonale.

8. Soit M une matrice orthogonale de taille n
   (a) Montrer que $\left|\sum_i \sum_j m_{i,j}\right| \leq n$.
   Indication :On pourra majorer l'expression $< X, MX >$ pour un vecteur X bien choisi
   (b) Montrer que $\sum_i \sum_j |m_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.
   (c) Dans l'inégalité précédente, déterminer un cas d'égalité lorsque n est égal à deux, puis lorsque n est une puissance de 2

9. Montrer que vect$(O_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R})$

Endomorphismes et matrices symétriques

10. Réduire orthogonalement les matrices symétriques suivantes :
   (a) $\begin{pmatrix} a & a & b & b \\ a & a & b & b \\ b & b & a & a \\ b & b & a & a \end{pmatrix}$ (généraliser)
   (b) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
   (c) $M = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
   On déterminera le noyau de l'endomorphisme défini par M et on déduira un sous espace stable de dimension 2.

11. Soit P le polynôme caractéristique de la matrice de taille n : $M = (m_{i,j})$ avec $m_{i,i+1} = m_{i,i-1} = 1$ les autres termes étant nuls.
   Montrer sans calcul que P posséde n racines réelles distinctes.

12. Soit M la matrice complexe de taille n de coefficient $m_{i,j} = a_i.a_j$ où $a_1, ..., a_n$ sont n complexes donnés.
   Calculer M^2. M est elle toujours diagonalisable ?

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = AA^T$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.
   Montrer que $A^T A = A = 0$

14. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale telle que $A^T A = OAA^T O^T$

15. (a) Démontrer que l'endomorphisme F de $\mathbb{R}[X]$: $P \to ((X^2 - 1)P')'$ est symétrique pour le produit scalaire $(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$
   (b) Montrer que F possède une base orthonormée (L_n) de vecteurs propres qui vérifie en plus $d^\circ L_n = n$.
   (c) Etudier l'existence de solutions polynômiales de l'équation différentielle :
   $$(E_\alpha) : \left(x^2 - 1\right) y'' + 2xy' + \alpha y = 0$$

16. Soit A une matrice symétrique réelle, montrer que l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$: $M \to MA$ est diagonalisable. On pourra par exemple remarquer qu'il est symétrique pour un produit scalaire bien choisi.
   Montrer la même conclusion dans le cas d'une matrice A diagonalisable.

17. Soit A une matrice symétrique réelle. Montrer que $\det(I_n + A^2) \geq 1 + (\det A)^2$. Quels sont les cas d'égalité ?

18. Soit A une matrice symétrique réelle telle que $A^3 = I$. Montrer que $A = I$.

19. *classique.* Généralisation du précédent
Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $A^3 = B^3$
    (a) Montrer que pour toute valeur propre λ de A on a l'inclusion $\ker(A - \lambda I_n) \subset \ker(A^3 - \lambda^3 I_n)$
    (b) Montrer que l'inclusion précédente est en fait une égalité.
    (c) En déduire que $A = B$

20. Norme d'opérateur et rayon spectral.
cet exercice est proche du cours. C'est un classique incontournable
    (a) Soit u un endomorphisme de E on rappelle la définition de la norme d'opérateur :
    $$|||u||| = \sup_{x \neq O} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$
    Vérifier que pour toute valeur propre de u on a $|\lambda| \leq |||u|||$
    (b) Soit u un endomorphisme symétrique dont le spectre est noté S. On note $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in S} |\lambda|$ le rayon spectral de u.
    Démontrer que :

    Pour tout x, y on a : $(u(x)|y) \leq \rho(u)||x|||y||$
    Pour tout x on a $||u(x)|| \leq \rho(u)||x||$

    Déterminer un vecteur x pour lequel on a égalité dans la seconde inégalité. En déduire qu'on a $\rho(u) = |||u|||$

21. Matrices symétriques et théorie des graphes.

Soit d un entier et $A \in S_n(\mathbb{R})$ de trace nulle , à coefficients dans $\{0, 1\}$, telle que $A^2 + A = (d-1)I_n + J$, la matrice J étant la matrice dont tous les coefficients valent 1.
Montrer que $n = d^2 + 1$
Interpréter en termes de graphes.

Isométries et autres endomorphismes remarquables

22. *classique.* Moyenne de Cesaro
Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{O}(E)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(Id_E - u)^\perp = \ker(Id_E - u)$.
On note p le projecteur orthogonal sur $\ker(Id_E - u)$.
Soit x un vecteur de E montrer que la suite $\dfrac{1}{n+1}(x + u(x) + ... + u^n(x))$ converge vers $p(x)$

23. Endomorphismes préservant l'orthogonalité.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, soit f un endomorphisme de E vérifiant :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ (x|y) = 0 \Rightarrow \big(f(x)|f(y)\big) = 0$$
Montrer que deux vecteurs unitaires u, v ont des images de même norme. (on pourra calculer le produit scalaire entre $u + v$ et $u - v$.
En déduire qu'il existe unréel a et une isométrie g telles que $f = ag$.

24. Spectre et diagonalisabilité des matrices orthogonales et des isométries
    (a) Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont toutes de module 1
    (b) Trouver les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables (dans $\mathcal{M} - n(\mathbb{R})$.

25. *difficile.* Le théorème de Cartan-Dieudonné.
Soit $u \in L(E)$.

(a) Soit x un vecteur qui n'est pas dans le noyau de u. Etablir qu'il existe une reflexion f telle que $f(u(x))$ soit colinéaire à x.
(b) Désormais on suppose que u est un élément de $O(E)$. Montrer qu'il existe f telle que $f(u(x)) = x$.
(c) Démontrer que pour tout entier k il existe des réflexions $f_1, ...f_k$ telles que $f_1 \circ f_2 ... \circ f_k \circ u$ coincide avec l'identité sur un SEV de dimension k
(d) Conclure que u est le produit d'au plus $n = \dim E$ réflexions.
(e) Redémontrer le résultat ci-dessus en utilisant le théorème de réduction des isométries.

26. *classique.*
Soit E un espace euclidien. Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ deux familles de vecteurs telles que $(u_i|u_j) = (v_i|v_j)$ pour tout (i, j).

(a) On suppose dans un premier temps que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.
Montrer que l'unique endomorphisme f tel que pour tout i, $f(u_i) = v_i$ est une isométrie.

(b) Soient M et N deux matrices telles que $M^T M = N^T N$ et telles que M est inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale telle que $M = ON$.

Les questions qui suivent sont plus difficiles :

(c) On suppose que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre de E. Montrer qu'il existe une isométrie telle que pour tout i, $f(u_i) = v_i$.
(d) Montrer que cette conclusion est conservée si l'on ne fait plus d'hypothèse sur la famille $(u_1, \ldots, u_n)$.

27. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$, puis $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

28. *classique.* Sous groupes finis de GL_n
$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(.|.)$.
Soit G un sous groupe fini de $Gl_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application :

$$(X, Y) \to \sum_{g \in G} (gX|gY)$$

est un produit scalaire pour lequel tout élément de G est une isométrie.
En déduire que G est isomorphe à un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$

29. Endomorphismes antisymétriques.
Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien tel que pour tout x on ait $(u(x)|x) = 0$. On a montré dans un exercice précédent que cette condition équivaut à $u^* = -u$.

(a) Déterminer les valeurs propres réelles éventuelles de u.
(b) Montrer que l'endomorphisme u^2 est symétrique et que ses valeurs propres sont négatives ou nulles.
(c) Démontrer que u et u^2 ont le même noyau.
(d) soit λ une valeur propre non nulle de u^2. On peut d'après ce qui précède l'écrire $\lambda = -\mu^2$ avec μ réel. Montrer que si x est un vecteur unitaire de $E_\lambda(u^2)$ alors la famille $(x, \dfrac{1}{\mu}u(x))$ est orthonormale et engendre un plan stable par u.
(e) En déduire qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de taille 1 ou 2, les blocs de taille 1 étant des zéros, les blocs de taille 2 étant des matrices antisymétriques de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$

30. Soit u un endomorphisme antisymétrique. On pose $r = (u + Id) \circ (Id - u)^{-1}$.

(a) Démontrer que r est bien défini, que c'est une isométrie dont -1 n'est pas valeur propre.
(b) Retrouver alors, en utilisant le théorème de réduction des isométries, le résultat de l'exercice précédent.

31. Soit $A \in A_3(\mathbb{R})$

   (a) Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) Déterminer $\lim_{n\to\infty} (I + \dfrac{A}{n})^n$

Matrices commutant avec leur transposée (matrices normales)

Bien que n'étant pas au programme, les matrices commutant avec leur transposées ont des propriétés remarquables et peuvent donner lieu à de nombreux exercices.

32. Soit u un endomorphisme tel que $u^* = u^2$

   (a) On suppose dans un premier temps que u est inversible. Démontrer que u^3 est symétrique et que u est une isométrie. En déduire la forme réduite en base orthonormée de A.

   (b) On ne suppose plus que u est inversible. Démontrer que l'image et le noyau de u sont supplémentaire orthogonaux. Trouver alors une forme réduite simple pour u en base orthonormée.

33. (mines)
   Déterminer les matrice A dont le spectre est réel et telles que $A^2 - 2A^T + I_n = 0$

Matrices symétriques positives, formes quadratiques, applications

34. La matrice de Hilbert :
   On pose note M la matrice de taille $n+1$ terme général $\dfrac{1}{i+j+1}$ (on indexe à partir de 0).
   Si $(x_0, \ldots, x_n)$ est un $n+1$ uplet de réels, exprimer $\displaystyle\int_0^1 (x_0 + tx_1 + \cdots + t^n x_n)^2 dt$ à l'aide de la matrice M et des x_i.
   En déduire que $\det M > 0$.

35. *classique.* Racine carrée.

   Soit M une matrice symétrique positive.
   Montrer qu'il existe une matrice S symétrique positive telle que $S^2 = M$.
   Èn s'inspirant de l'exercice 19. démontrer qu'en fait la racine carrée est unique.

36. *classique.* Décomposition polaire. Cas inversible.

   Soit M une matrice réelle inversible. Démontrer, en utilisant la matrice ${}^tMM$, qu'il existe un unique couple (S, O) avec S matrice symétrique définie positive et O matrice orthogonale tel que $M = SO$ (décomposition polaire).

37. (a) Soit M symétrique positive. Montrer que $m_{i,i} \geq 0$ pour tout i.
   Quelles sont les matrices symétriques positives de trace nulle ?

   (b) Montrer que pour tout $p \leq n$, $((m_{i,j})_{i\leq p, j\leq p})$ est symétrique positive (en particulier, son déterminant est positif.)

   (c) On suppose que M est une matrice symétrique positive dont le coefficient $m_{1,1}$ est nul. Montrer que la première ligne et la première colonne de M sont nulles.
   Indication : calculer $X^T M X$ pour un vecteur $X = e_1 + \lambda e_k$.

38. *classique. difficile.* Conditions de Sylvester :

   Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier $k \in [1, n]$ on note D_k le déterminant de la matrice extraite $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}$.
   Démontrer que A est dans S_n^{++} si et seulement si tous les D_k sont strictement positifs.

39. Soient M, N symétriques positives,
    (a) Montrer que $M+N$ est symétrique positive.
    (b) Soient M, N deux matrices symétriques quelconques, si les valeurs propres de M (resp N) sont comprises entre deux valeurs a, b (resp a', b'), alors les valeurs propres de $M+N$ sont comprises entre $a+a'$ et $b+b'$.

40. *difficile. classique.* (réduction simultanée)Soient M et N symétriques, N étant définie positive.

    Montrer que la matrice N peut s'écrire sous la forme $P^T P$ avec P inversible. Puis :
    (i) Montrer que MN est diagonalisable.

    Dans les deux items suivants M est positive.
    (ii) Montrer que $\mathrm{tr}(MN) \geq 0$

    (iii) Montrer que $\det(M+N) \geq \det(M) + \det(N)$(on commencera par le cas ou $N = I_n$)

41. *classique.* Réduction simultanée de deux formes quadratiques :
    Soient M et N symétriques, N étant définie positive.
    Montrer qu'il existe C inversible et D diagonale telle que l'on ait $N =^t CC$ et $M =^t CDC$.

42. Un exercice de produit scalaire.
    Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
    Démontrer que pour tous vecteurs X, Y on a $(X^T Y)^2 \leq X^T A^2 X \cdot Y^T (A^{-1})^2 Y$.

43. Topologie
    Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{Q}_A = \{X \in \mathbb{R}^n, ^t XAX = 1\}$
    Montrer que $\mathcal{Q}_A$ est un compact non vide si et seulement si A est définie positive.

44. *difficile.* Topologie
    (a) Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est l'adhérence dans $S_n(\mathbb{R})$ de $S_n^{++}(\mathbb{R})$
    (b) *difficile.* Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est ouvert dans $S_n(\mathbb{R})$

45. Familles isogonales.
    Soit E un espace euclidien de dimension n. Une famille $u_1, \ldots, u_p$ de p vecteurs **unitaires** est dite isogonale si on a, pour $i \neq j$ le produit scalaire $(u_i|u_j)$est un réel α indépendant de i et j.
    (a) Montrer que la matrice de terme général $(u_i|u_j)$ est dans S_n^+
    (b) En déduire une inégalité entre p et α. Préciser le cas d'égalité. Que signifie cette situation géométriquement ?

46. (centrale)
    (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n$ telle que les valeurs propres de $I_n - A$ sont > 0 et que : $\forall p$, $\mathrm{tr}A^p \geq 0$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $]-1, 1[$.
    (b) Soit $A \in \mathcal{S}_n$ à coefficients ≥ 0 et telle que $I_n - A \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que $(I_n - A)^{-1}$ est à coefficients dans $\mathbb{R}^+$.
    (c) Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base normée de E telle que : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle f_i, f_j \rangle < 0$. Montrer qu'il existe une unique base e telle que $\langle f_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$. Montrer cette famille vérifie $\langle e_i, e_j \rangle > 0$ pour tout i, j.

47. (Centrale) Calculer $\sup \left\{ \dfrac{P(0)\ P(1)}{\int_0^1 P^2},\ P \in\ \mathbb{R}_2[X] \setminus \{0\} \right\}$.
    indication : on pourra se placer dans une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$

48. (mines)
    Soit $A = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
    a) Trouver U triangulaire inférieure telle que $A = U^t U$.
    b) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.
    On pourra utiliser la matrice $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $n_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et 0 sinon.
    c) En déduire que les valeurs propres de A^{-1} sont dans $]0, 4[$.

49. (mines)
Soient E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux et $u = q \circ p \circ q$. Montrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans $[0, 1]$.

50. Soit $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace euclidien. On considère $(u, v) \in \mathcal{S}^{++}(E)^2$ tel que $u - v \in \mathcal{S}^{++}(E)$.
Montrer que $v^{-1} - u^{-1} \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

51. *difficile.* Soit A une matrice symétrique définie positive, et v un vecteur non nul. Déterminer

$$\inf_{x,(x|v)\neq 0} \frac{{}^t x A x}{(x|v)^2}$$

ainsi que les vecteurs x pour lesquel cet inf est atteint.

indication : on pourra faire le changement de variable $y = A^{1/2}x$ ou $A^{1/2}$ est la racine carrée de la matrice A

52. *difficile.* Théorème de Courant et Fisher :
Soit M une matrice symétrique réelle de spectre $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$. On note F_k l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimension k et u l'endomorphisme associé à M dans une base orthonormée. Montrer que $\lambda_k = \inf_{F \in F_k} (\sup_{x \in F} \dfrac{< u(x)|x >}{\|x\|^2})$. Exprimer également λ_k comme un $\sup(\inf)$

53. *difficile.* Application du théorème de Courant et Fisher : entrelacement des valeurs propres.

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres
Soit N_i la matrice obtenue en enlevant la $ieme$ ligne et la $ieme$ colonne de M et $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_{n-1}$ ses valeurs propres.
Montrer l'inégalité :

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$$