Equations différentielles linéaires

Un peu d'histoire : Cantor et l'infini.

Source de nombreux paradoxes défiant à priori la logique, de controverses entre scientifiques ou philosophes, l'infini devient avec Georg Cantor (1845-1918) un objet d'étude mathématique par lui même au travers de la théorie des ensembles. Ce grand mathématicien fut amené à étudier la question des ensembles infinis pour répondre au problème de convergence des séries trigonometriques (dont l'ensemble de convergence peut etre tres compliqué lorsque la série n'est pas absolument convergente). Sa première découverte stupéfiante est l'existence de plusieurs infinis « différents »(une infinité en fait) en particulier il établit que l'infini discret des entiers et l'infini « continu »des réels ne sont pas les mêmes. Il formule alors la question suivante : y a t-il un infini intermédiaire entre l'infini discret et l'infini continu ? La réponse inattendue ne viendra qu'en 1962 lorsque le mathématicien américain Paul Cohen démontrera l'indécidabilité de cette question. Cette preuve était hors de portée des contemporains de Cantor et celui ci finira par perdre la raison en la cherchant avant de s'éteindre dans un asile d'aliénés. Son oeuvre, elle, restera : allant à l'encontre des idées de son époque, et malgré les critiques de ses confrères il a permis de rénover et d'unifier les mathématiques en leur donnant pour base la théorie des ensembles.

Exercices techniques

1. Soit $a \in \{0,1\}$. Résoudre sur $]0,\pi[$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y' \sin x \, - (1+a) y \cos x \, = e^x \sin^{2+a} x$$

2. On se propose de résoudre l'équation différentielle
$$x^2 y'' + 2x(1+x)y' - 2(1+x)y = 0 \qquad (E)$$
   (a) Déterminer une solution particulière y_0 de la forme $x \mapsto x^\alpha$
   (b) Trouver l'équation différentielle vérifiée par la fonction z telle que $y = y_0 z$ et en déduire toutes les solutions de (E).

3. Résoudre
$$4xy'' - 4y' + x^3 y = 0$$
après avoir déterminé une série entière solution.

4. On considère l'équation différentielle :
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$
On fait dans cette équation le changement de variable $t = \phi(x)$ (c'est à dire qu'on considère la fonction $z(t)$ telle que $z(\phi(x)) = y(x)$.
   (a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par z
   (b) Montrer que pour que cette équation soit à coefficients constants, il est nécessaire que la fonction $(\phi')^2$ soit proportionnelle à b.
   (c) Application : résoudre les équations suivantes :
$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$$
$$y'' + y' + e^{-2x} y = 0$$

5. Intégrer sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle suivante par la méthode de variation des constantes.
$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
En déduire que les solutions possèdent toutes un prolongement ar continuité en zéro.

6. (centrale)*difficile.*
Soient p, q deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle :
$$x'' + px' + qx = 0$$
   (a) Soient u_1 et u_2 deux solutions telles que $u_1 u_2 = 1$. On pose $z_i = \dfrac{u_i'}{u_i}$. Montrer que z_1 et z_2 sont deux solutions opposées d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1.

(b) En déduire la condition nécessaire et suffisante sur p, q pour que u_1 et u_2 existent

(c) Résoudre

$$(1+\cos(4t))x''(t) - 2\sin(4t)x'(t) - 8x(t) = 0$$

7. Soit a un réel.
Trouver toutes les fonctions de classe C^1 telles que $f'(x) = f(a-x)$
Même question avec l'équation $f'(x) = f(\frac{a}{x})$.

8. Soit g continue sur $[0,1]$. Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ qui vérifient pour tout x :

$$f(x) - \int_0^x f(t)dt = g(x)$$

9. (centrale) *difficile.* Trouver les fonction $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $y'' + |y| = 0$ et $y(0) = -1$.

10. (mines) Résoudre

$$y^{(4)} - y = 0$$

avec les conditions initiales
$y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

11. (mines)
a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et l'unicité d'une fonction $y_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que : $y_n(0) = 0$, ${y_n}'(0) = 1$ et

$$(1+\frac{1}{n})\, {y_n}'' - (2+\frac{1}{n}){y_n}' + y_n = 0$$

.
b) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (y_n).
c) Comment généraliser ?

Etude qualitative

12. Solutions périodiques
On considère l'équation $y'' + f(x)y = 0$ où f est 2π périodique.
   (a) Montrer que si y est solution, il en est de même de $x \mapsto y(x+2\pi)$
   (b) Montrer que toute solution qui vérifie $y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$ est périodique.
13. Principe des zéros isolés.
On suppose que y est une solution non nulle d'une équation d'ordre 2 $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$qui s'annule en x_0.
   (a) Montrer que $y'(x_0)$ n'est pas nul.
   (b) Montrer que y ne s'annule pas au voisinage de x_0.
   (c) Soit I un segment. Montrer que y ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I. (on utilisera le théorème de Bolzano Weierstrass)

14. Un exemple d'équation de type hyperbolique :

On met en oeuvre dans cet exercice différentes techniques classique pour l'équation d'ordre 2.
Soit (E) l'équation différentielle

$$y'' - x^2 y = 0$$

   (a) Soit y une solution de (E) qui s'annule deux fois. Montrer que y est nulle (on pourra étudier les variations de y^2).
   (b) En déduire que pour tout a, b elle possède une unique solution qui vérifie $y(0) = a, y(1) = b$. On pourra pour cela utiliser l'application linéaire définie sur l'espace vectoriel des solutions par $y \mapsto (y(a), y(b))$.
   (c) On considère l'unique solution z qui vérifie $z(0) = 0, z'(0) = 1$. Montrer que z est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
   (d) Montrer que z est convexe. Montrer que $z(x)$ puis $\dfrac{z(x)}{x^2}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

(e) Soit z_1 une solution indépendante de z. Montrer que le Wronskien $w = zz_1' - z_1 z'$ de z et z_1 est une constante non nulle (on pourra calculer la dérivée de w).

(f) Calculer la dérivée de $\dfrac{z_1}{z}$ et en déduire une expression de z_1 faisant intervenir deux constantes d'intégration et une primitive de $\dfrac{1}{z^2}$

(g) Démontrer, à l'aide du calcul précédent que l'équation (E) possède des solutions non nulles bornées au voisinage de l'infini. donner leur expression en fonction de z.

15. Un exemple d'utilisation du Wronskien :

Soit q une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$. Soit (E) l'équation

$$y'' + q(x)y = 0$$

On suppose que toutes les solutions de (E) sont bornées. Montrer successivement pour toutes solutions y, z :
y'' est intégrable
y' tend vers zéro en $+\infty$
$W(y, z)$ tend vers zéro en $+\infty$ (W wronskien)
$W(y, z)$ est constant
Que peut on en conclure ?

16. Exemple d'utilisation d'une "intégrale première".

Soit q une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Soit f une solution de l'équation différentielle

$$y" + qy = 0$$

On pose $g = f'^2 + qf^2$. En utilisant cette fonction g établir :

(a) Si q négative, f^2 est convexe, et $\dfrac{f^2(x)}{x}$ possède une limite en $+\infty$

(b) Si q positive, décroissante et minorée par 1, f est bornée.

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}+$

17. *classique.* Soit f une fonction C^1 telle que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) + f'(t) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$

18. *classique.* Variante du précédent
Soit f une fonction C^1 telle que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) + 2f'(t) + f"(t) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$

19. *classique. difficile.* Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée.
Montrer que l'équation différentielle $y'' - a^2 y = f$ admet une unique solution bornée.

20. *classique.* Le théorème de Sturm
Soient a et b deux fonctions continues.
On suppose que $a(x) \geq b(x)$ et on considère f_a (resp f_b) solution non nulle de $y'' + ay = 0$ (resp. $y'' + by = 0$).
On suppose que $x_0 < x_1$ sont deux zéros consécutifs de f_b. Montrer que f_a s'annule sur l'intervalle $[x_0, x_1[$.

indication : Supposer le contraire et montrer qu'on peut alors sans perte de généralité faire l'hypothèse que f_a et f_b sont positive sur $[x_0, x_1[$. Etudier sur cet intervalle les variations du wronskien de f_a et f_b.

21. Cet exercice est une prolongation de l'exercice précédent dont on garde les notations.

(a) on suppose b négative montrer que f_b s'annule ou maximum une fois. (on pourra supposer le contraire et appliquer pour $a = 0$)

(b) On suppose $a \geq 1$ montrer que f_a s'annule sur tout intervalle d'amplitude π. (On pourra supposer le contraire et appliquer pour $b = 1$

22. *très difficile.* (prolongation du précédent)

    on suppose que $a(x) = e^x$ déterminer un équivalent du $n$ieme zéro de f_a.

23. Forme intégrale des solutions de $y'' + y = g$
    Montrer que la fonction $y(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$ est solution de l'équation $y'' + y = g$.

24. *classique.* Cet exercice utilise l'exercice précédent. On considère une fonction f de classe C^2 telle que $f'' + f$ est positive. Etablir que pour tout x $f(x+\pi) + f(x) \geq 0$.

    Indication : on introduira la fonciton $g(x) = f(x+\pi) + f(x)$ et on montrera qu'il existe des constantes b, c telle que $f(x) = a\cos x + b\sin x + \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$.

25. *difficile.* (centrale)
    On considère une application q de classe C^1 et π périodique et on considère l'équation différentielle E_ω :

    $$y" + (\omega^2 - q)y = 0$$

    dont on note S_ω l'espace des solutions.
    On note aussi x_1 et x_2 (sans mention de ω pour alléger la notation) les solution des problémes de Cauchy $(x(0), x'(0)) = (1, 0)$ et $(x(0), x'(0)) = (0, 1)$

    (a) Calculer le wronskien de x_1 et x_2
    (b) Soit T l'application qui à une solution x associe $t \to x(t+\pi)$. Démontrer que T est un endomorphisme de S_ω
    (c) On note $\Delta(\omega)$ ou plus simplement Δ le réel $\frac{1}{2}\operatorname{tr} T$. Démontrer que $\chi_T = X^2 - 2\Delta X + 1$
    (d) On suppose $|\Delta| \neq 1$ Etudier l'existence de solutions bornées selon la position de $|\Delta|$ par rapport à 1.
    (e) Trouver la condition nécessaire et suffisante sur Δ pour qu'il existe une solution π périodique.
    (f) Etablir les égalités

    $$x_1(t) = \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t x_1(u)q(u)\sin(\omega(t-u))du$$

    $$x_2(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^t x_2(u)q(u)\sin(\omega(t-u))du$$

    (g) Démontrer que lorsque ω tend vers l'infini on a le développement asymptotique $\Delta(\omega) = \cos(\omega\pi) + O(\frac{1}{\omega})$
    (h) Démontrer qu'il existe une suite strictement croissante de valeurs de ω pour lesquelles E_ω possède des solutions 4π périodiques.

Systèmes différentiels

26. Résoudre le système $\begin{cases} x' &= -x + 2y \\ y' &= 2x + 2y \end{cases}$

    soit par diagonalisation, soit en calculant l'exponentielle de la matrice associée.

27. Déterminer la solution du système différentiel linéaire $X' = AX$ avec :$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui vérifie $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

28. (a) Résoudre le système d'ordre 2 ,

$$X'' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X \qquad (S)$$

en diagonalisant la matrice.

(b) Vérifier que l'espace des solutions est de dimension 4. Retrouver ce fait en transformant le système (S) en un système d'ordre 1 dont on précisera la taille.

29. Soit A une matrice carrée réelle.

(a) Montrer que si A possède une valeur propre imaginaire pure $\lambda = i\omega$ alors le système $X' = AX$ possède une solution non nulle $X(t)$ qui est $\dfrac{2\pi}{\omega}$ périodique (construire une telle solution à l'aide d'un vecteur propre de A).

(b) Réciproquement on suppose qu'il existe une solution T périodique non nulle. $t \mapsto X(t)$.
Démontrer que le vecteur $X(0)$ est vecteur propre pour la valeur propre 1 de la matrice $\exp(TA)$.
En déduire que A possède une valeur propre imaginaire pure.

30. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer M^2 puis résoudre le système différentiel de matrice M.

(b) Montrer plus généralement que lorsque M est une matrice nilpotente, les solutions sont des fonctions vectorielles polynômiales (on pourra soit raisonner directement, soit utiliser l'exponentielle).

31. *classique.*
Soient A, B deux matrices qui commutent.Vérifier que B et $\exp(A)$ commutent Soit X un vecteur colonne fixe.

Calculer la dérivée de $t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)X$.
En déduire l'égalité $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Exercices difficiles

32. (X)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont aucune valeur propre n'est dans $i\mathbb{Z}$. Soit $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une application continue et 2π périodique.
Démontrer que le système différentiel $X' = AX + B$ possède une unique solution 2π périodique.
indication : on cherchera une expression intégrale des solutions.

33. Résolvante d'un système diffé rentiel.

On considère le système $X'(t) = A(t)X(t)$. On fixe $(X_1(t), ..., X_n(t))$ un système fondamental de solutions et on note $Y(t)$ la matrice dont les colonnes sont les $X_i(t)$.

(a) Montrer que pour tout (t, s) la matrice $R(t, s) = Y(t)Y(s)^{-1}$ est définie (on l'appelle la résolvante du système).
Etablir la relation $R(t, s)R(s, u) = R(t, u)$. Quelle est l'inverse de $R(t, s)$?

(b) Si l'on part d'un autre système fondamental on définit une autre matrice résolvante. Comment se déduit elle de la précédente ?

(c) Dans le cas où le système est autonome (c'est à dire que la matrice A ne dépend pas de t), exprimer la résolvante à l'aide de l'exponentielle.

(d) Soit $C \in M_{n,1}$. Exprimer, à l'aide de la résolvante et de C l'unique solution du système vérifiant $X(t_0) = C$.

(e) on note $d(t, s) = \det R(t, s)$. Démontrer $d(s + h, s) = 1 + htr(A(s)) + 0(h)$. en déduire la valeur de $d(t, s)$

34. (X) Soient $B : t \in \mathbb{R} \mapsto B(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application continue et $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer qu'il existe $A : t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dérivable telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = A(t)\ B(t) - B(t)\ A(t)$ et $A(0) = A_0$.
b) Montrer qu'alors le spectre de $A(t)$ est indépendant de t et, plus précisément, qu'il existe $S : t \in \mathbb{R} \mapsto S(t) \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A(t) = S(t)A_0S(t)^{-1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

35. (X)

Soient A, B, C des matrices vérifiant : $AC = CA$,$BC = CB$,$AB - BA = C$.

(a) Calculer pour tout réel t, la matrice $B\exp(tA) - \exp(tA)B$ en fonction de A, B, C, t

(b) Démontrer

$$\exp(tA)\exp(tB)\exp(-\frac{t^2}{2}C) = \exp(t(A+B))$$